浙 江 林 学 院 学 报 2001，**18**（1）：36～40
Journal of Zhejiang Forestry College

文章编号：1000-5692（2001）01-0036-05

人工用材林最优密度控制模型

黄家荣
（贵州大学 农学院 林学系，贵州 贵阳 550025）

摘要：以抛物线型密度效应模型为前提，针对人工用材林生长系统的特点，用最优控制方法建模，以动态规划方法求解，导出最优密度控制模型。模型具有幂次数可变、适应性较强、疏伐间隔期可变和实际应用较方便等特点。模型在贵州马尾松人工用材林中的应用结果表明，模型计算结果符合人工用材林生长规律，并与实地试验吻合。表 2 参 11

关键词：最优控制；动态规划；可变间隔期；人工用材林；林分密度
中图分类号：S753. 3　　　文献标识码：A

森林密度控制问题的研究已有 200 多年的历史，目前广泛应用优化方法来解决。在常用的优化方法中，动态规划方法由于其理论上的优越性而被广泛应用，其中影响比较大的是用离散阶段连续状态的动态规划建立的同龄林最优林分密度模型[1]。之后，国内学者进行了同样研究[2,3]，推动了该模型在国内的发展。但国内外学者用动态规划方法研究的森林经营密度模型有个共同的缺点，就是疏伐间隔期固定，生产上应用不便。对于这个问题，笔者曾在文献 [4] 中进行了探讨。模型发表后，很快得到教学、科研和生产单位的应用[5~8]。应用者认为，该模型实用性强，使用简单。本文在文献 [4] 的基础上，结合近年的研究应用情况，对该模型作进一步的研究。

1 模型假设

日本学者在 60 年代提出密度效应法则，并创立了林分密度管理图[9]。本文设人工用材林单位面积蓄积量与单位面积立木株数（密度）的关系服从密度效应法则，并用数学表达式表示为为：

$$M = AN + BN^{c}。\tag{1}$$

相应的平均单株材积密度效应式为：

$$V = A + BN^{c-1}。\tag{2}$$

式中：M 为单位面积蓄积（$m^3 \cdot hm^{-2}$）；V 为平均单株材积（m^3）；A, B 为模型参数，$A > 0, B < 0$，与林分年龄和立地有关；c 为幂常数。以林分优势木平均高作为林分年龄和立地的综合变量，用一般函数形式表达模型参数，A, B 与优势木平均高 H 的关系：

$$A = A(H)，\tag{3}$$

$$B = B(H)。\tag{4}$$

它们的具体形式用具体的人工林资料确定。

收稿日期：2000-06-30；修回日期：2000-09-29
基金项目：贵州省自然科学基金资助项目(933036)
作者简介：黄家荣(1957—)，男，贵州水城人，副教授，硕士，从事森林生长收获预估和森林结构调整研究。

2　模型建立

人工用材林密度控制的目的是为使林木有一个适宜的生长空间，充分发挥生产潜力，实现速生丰产优质。因此，人工用材林的密度控制问题是一个最优控制问题，可用最优控制的理论和方法来解决。当把最优控制的概念用于人工用材林最优密度控制时，实质上就是寻找一种密度控制规律，使人工用材林生长系统在其作用下，从某一初始状态转移到某个要求的终端状态，并保证木材产量最大。根据最优控制的理论和方法，要为人工用材林生长系统建立一个最优密度控制模型，就要针对人工用材林生长系统的特点，对控制变量、状态变量、状态方程、边界条件和性能指标函数等作出规定。

2.1　控制变量和状态变量

在人工用材林生长系统的运行中，林业上采取的密度控制手段是疏伐。疏伐量的大小直接使林分密度发生改变。疏伐量可用疏伐木的株数、断面积和材积等表示。为简单实用，这里用疏伐木株数表示疏伐量。根据林木生长理论，疏伐后的保留木生长直接受保留木密度影响，又因为控制疏伐量等价于控制保留量，故本文以保留木株数作为控制变量，用 u 表示。

根据最优控制问题中各因素之间的关系，在人工用材林密度控制问题中，用于描述林分生长系统的状态变量应满足：①与人工用材林密度紧密相关；②能用于描述林分生长变化；③与木材收获量密切联系。根据林学理论，在描述林木数量特征的主要变量中，胸径、株数、断面积和蓄积等都能很好地满足以上几个条件。因此，它们都可以用作最优密度控制问题中的状态变量。由于蓄积是胸径（或断面积）和树高的综合函数，为便于控制变量与状态变量直接联系，本文以人工用材林株数和蓄积构成二维状态变量，以 (N, M) 表示。

2.2　状态方程和边界条件

由于人工用材林疏伐是在多个时刻点上进行，密度控制是一个多步决策过程。设共有 m 次决策，其中前 $m-1$ 次为疏伐决策，第 m 次为主伐决策，相应的状态转移方程为：

$$N_{i+l} = N_i - n_i = u_i; \tag{5}$$

$$M_{i+l} = M_i - V_i + \Delta M_{i,\ i+l}\ (i = 1, 2, \ldots, m)。 \tag{6}$$

式中：N_i, M_i 为第 i 次采伐前的株数（株$\cdot$hm^{-2}）和蓄积（m$^3\cdot$hm^{-2}）；n_i, V_i 为第 i 次采伐株数（株$\cdot$hm^{-2}）和材积（m$^3\cdot$hm^{-2}）；$\Delta M_{i,\ i+l}$ 为第 i 次至第 $i+1$ 次采伐之间的蓄积净增量。

边界条件，即人工用材林生长系统在密度控制规律作用下运行的初始状态和终端状态。初始状态，即首次疏伐前的立木株数和蓄积：

$$(N_1, M_1) = (N_0, M_0)。 \tag{7}$$

终端状态，即主伐后的立木株数和蓄积：

$$(N_{m+1}, M_{m+1}) = (0, 0)。 \tag{8}$$

2.3　性能指标函数

人工用材林的每次采伐（疏伐或主伐）都产生一定的木材收获量，这里以 m 次采伐的木材总获量作密度最优控制的性能指标函数：

$$J_m = \sum_{i=1}^{m} V_i。 \tag{9}$$

人工用材林的最优密度控制，就是寻找控制序列 $u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*$ 使人工用材林生系系统的其作用下，从初始状态运行到终端状态，使性能指标取得最大值：

$$J_m^* = \max_{u_1, u_2, \ldots, u_m} \sum_{i=1}^{m} V_i。 \tag{10}$$

3　模型求解

最优控制模型的求解方法，常用的有古典变分、极大值原理，动态规划和各类数值求解法，它们

各有特点。其中动态规划方法是把多级寻优转为单级寻优，化难为易。本文用之按逆向求解法求解多步决策过程的人工用材林最优密度控制模型。

设进行 3 次决策，即 2 次疏伐和 1 次主伐，则

（1）对 $i=m=3$，$J_1^*=\max\limits_{u_3}\{V_3+J_0^*\}$。因为是主伐，$u_3=N_3-n_3=0$，$J_0^*=0$，$V_3=M_3$，故 $u_3^*=0$。相应的最优性能指标为：$J_1^*=M_3=A_3N_3+B_3N_3^c$。

（2）对 $i=2$，

$$J_2^*=\max_{u_2}\{V_2+J_1^*\}$$
$$=\max_{u_2}\{A_2N_2+B_2N_2^c-A_2u_2-B_2u_2^c+A_3N_3+B_3N_3^c\}$$
$$=\max_{u_2}\{A_2N_2+B_2N_2^c-A_2u_2-B_2u_2^c+A_3u_2+B_3u_2^c\}。$$

在 {} 中对 u_2 求一阶导数，并令之为 0，求得 u_2 的最优值为：

$$u_2^*=\{(A_2-A_3)/[c(B_3-B_2)]\}^{1/(c-1)}。$$

相应的最优性能指标：$J_2^*=A_2N_2+B_2N_2^c+\Delta M_{2,3}^*$。

（3）对 $i=i$，

$$J_3^*=\max_{u_1}\{V_1+J_2^*\}$$
$$=\max_{u_1}\{A_1N_1+B_1N_1^c-A_1u_1-B_1u_1^c+A_2N_2+B_2N_2^c+\Delta M_{2,3}^*\}$$
$$=\max_{u_1}\{A_1N_1+B_1N_1^c-A_1u_1-B_1u_1^c+A_1u_1+B_1u_1^c+\Delta M_{2,3}^*\}$$

在 {} 中对 u_1 求一阶导数并令之为 0，求得 u_1 的最优值为：

$$u_1^*=\{(A_1-A_2)/[c(B_2-B_1)]\}^{1/(c-1)}。$$

相应的最优性能指标：$J_3^*=A_1N_1+B_1N_1^c+\Delta M_{1,2}^*+\Delta M_{2,3}^*$。

一般，设进行 m 次决策，即 $m-1$ 次疏伐，1 次主伐，对其中的第 i 次决策，最优控制变量值：

$$u_1^*=\{(A_1-A_{i+1})/[c(B_{i+1}-B_1)]\}^{1/(c-1)}。\tag{11}$$

相应的最优性能指标：

$$J_{m-(i-1)}^*=A_iN_i+B_iN_i^c+\Delta M_{i,i+1}^*+\Delta M_{i+1,i+2}^*+\Lambda+\Delta M_{m-1,m}^*。\tag{12}$$

（11）式即本文构建推导的人工用材林最优密度控制模型，其中 A_i 和 B_i 按（3）和（4）式表达：

$$A_i=A(H_i),\tag{3'}$$
$$B_i=B(H_i)。\tag{4'}$$

4　模型应用

以贵州省马尾松人工林为例，对模型进行示范性应用。

4.1　验证线型

用贵州大学农学院林学系教师在贵州省马尾松分布区收集的 508 块人工用材林标准地资料进行分析，结果显示，林分蓄积随立木密度的增大而上升，但当立木密度大到一定程度时，蓄积随密度的增大有下降趋势。因此，可以认为贵州马尾松人工用材林的蓄积与密度的关系服从抛物线型关系，可用模型（11）确定其最优密度。

4.2　确定常数 c 值

在密度效应模型中，令 c 取不同的值，拟合于同一套数据，根据拟合效果确定适宜的 c 值。用贵州龙里林场 3 次重复 5 个处理的马尾松密度试验资料（温佐吾教授提供）确定的 c 值与相关系数如表 1。查相关系数检验表，$r_{0.05}=0.88$，$r_{0.01}=0.96$，将之衡量表 1 中相关系数，结果表明，除 $c=3.00$ 外，其余的相关系数均达显著性水平，其中 $c=1.2$，1.50，1.75 的相关系数达极显著性水平，适宜的 c 值为 15。

4.3　确定模型参数

以 1 m 树高级，将 508 块标准地资料按林分优势木平均高分为 14 组，最低组 $H=8$ m，最高组 $H=21$ m。用 $c=1.5$ 的密度效应模型对各组数据进行拟合。将拟合结果作散点图分析，结果表明，模型参数 A 和 $-B$ 随优势高 H 的变化规律都呈“J”形曲线趋势。在常见的一元函数中，最适合这种“J”形曲线的是幂函数。因此，用幂函数拟合 A，$-B$ 与 H 的关系：

表 1　c 值与相关系数

Table 1　c value and related coefficient

模型参数（c）	相关系数（r）	模型参数（c）	相关系数（r）
0.50	0.91	2.00	0.96
1.10	0.96	2.10	0.96
1.25	0.97	2.50	0.94
1.50	0.97	3.00	0.44
1.75	0.97		

$$A=a_1H^{a_2};\tag{3″}$$

$$B=-b_1H^{b_2}。\tag{4″}$$

将其拟合结果和 $c=1.5$ 一起代入（11），得贵州省马尾松人工用材林最优密度控制模型为：

$$u_i^*=\{a_1(H_{i+1}^{a_2}-H_i^{a_2})/[1.5b_1(H_{i+1}^{b_2}-H_i^{b_2})]\}^2\tag{13}$$

式中：u_i^* 为第 i 次疏伐后的最优保留密度（株$\cdot$hm^{-2}）；H_i 为第 i 次疏伐时的林分优势木平均高（m）。模型参数拟合结果为：$a_1=5.546\,8\times10^{-5}$，$a_2=3.133\,274\,818$，$r=0.983\,7$，相关极显著；$b_1=5.635\,2\times10^{-8}$，$b_2=4.096\,610\,185$，$r=0.980\,8$，相关极显著。

4.4　计算最优林分密度

用模型（13）计算不同地位指数级各次疏伐时的最优保留密度，结果如表 2。在计算过程中，用以下模型计算各次疏伐时的林分优势木平均高：

$$H_t=c_0+c_1SI^{c_2}[1-\exp(-c_3)]^{c_4}。\tag{14}$$

式中：t 为林分年龄（a）；H_t 为 t 年的林分优势木平均高（m）；SI 为地位指数（m）；模型参数为：$c_0=1.64$，$c_1=0.859\,896\,114$，$c_2=1.182\,253$，$c_3=0.088\,140$，$c_4=2.383\,937\,979$。

模型（14）的拟合数据与模型（13）的拟合数据属同一套资料。

5　结果分析与问题讨论

模型应用结果表明，贵州省马尾松人工用材林的蓄积随立木株数密度的增大而增大，但当立木株数密度增到一定程度时，林分蓄积有下降的趋势，故可用模型（11）来确定其经营密度。在应用模型时，要作线型验证工作，否则，就有错用模型的可能。

密度效应式（1）（2）中的幂常数 c 具有一定的适宜取值范围。就本文所用的资料而言，适宜的取值范围为 1.1～2.1。对于同一套数据，模型参数 A，B 随 c 值不同而异。表 1 结果表明，$c=2$ 并非拟合效果最优者，但 $c=2$ 对应的模型较简单，它是本文模型的一个特例。

表 2 结果表明，用最优密度控制模型确定的最优林分保留密度随林分年龄的增大而递减，这符合人工用材林的生长发育规律，因为年龄较大的林分，林木冠幅较大，需要较大的营养空间，只有保留较少的株数，才有利于林木的生长。同时表明，随地位指数的增大，林分保留密度也递减，这也符合林木生长规律，因为对于相同的疏伐间隔期，立地条件较好的林分，生长较快，应保留较少的株数，以免林分生长过早地受到抑制。其他研究者应用文献［4］模型的结果[5～8]，也具有同样的规律。

表 2　最优林分密度

Table 2　The optimal stand density

疏伐年龄/a	地位指数/m				
	13	14	15	16	17
9	4 473	3 900	3 422	3 029	2 690
14	2 339	2 019	1 759	1 547	1 366
19	1 522	1 308	1 135	994	875

中等立地条件下的抚育间伐试验研究[10]表明，对 4 500～6 750 株$\cdot$hm^{-2}的马尾松人工林在 6～10 a 进行第 1 次间伐时，以保留 3 000～3 750

株·hm^{-2}为宜。中等立地条件下的密度试验研究[11] 表明，主伐株数以 1 200 株·hm^{-2}左右为宜。表 2 所列的最优保留密度与这些试验结果吻合。

本文模型除与文献 [4] 模型一样具有疏伐间隔期可变的特点外，还具有可变幂次数 c 的特点。因此，本模型除在生产上应用较方便外，适应性比文献 [4] 模型强，可依具体的人工用材林确定适宜的 c 值。另外，在模型假设中，先将模型参变量 A 与 B 与优势高 H 的关系表达为一般的函数形式，在具体应用中，再由实际数据确定其具体形式，这比文献 [4] 更为灵活和实用。应用研究者可根据具体情况，寻找最适合的参变量方程，不一定都得用幂函数。

根据前人的研究，林分产量与密度的关系，从本质上说，可观察到的有 2 种类型，一种是抛物线型，一种是渐近线型。在抛物线型中，随密度的增大，当产量达到最大值以后，接着就出现下降。在渐近线型中，产量曲线向一渐近线逼近。本文最优密度控制模型基于抛物线型的密度效应模型。关于渐近线型的最优密度控制问题，有待进一步研究。

致谢：实例基础资料系本系教师几十年调查、试验和收集的成果。感谢为此作过贡献的所有老师们。

参考文献：

[1] Chung M C. Derivation of optimal stand density over time-A discrete stage, continuous state dynamic programming solution [J]. *For Sci*, 1980, **26** (2): 217－227.

[2] 张运锋. 用动态规划方法探讨油松人工林最适密度[J]. 北京林业大学学报, 1986, **8** (2): 20－29.

[3] 李炳铁. 应用动态规划决策林分最佳收获[J]. 林业资源管理, 1989, **18** (2): 30－36.

[4] 黄家荣. 贵州马尾松人工林经营密度模型初探[J]. 北京林业大学学报, 1993, **15** (4): 32－37.

[5] 李梦, 穆树山, 匡莹, 等. 长白落叶松人工林最优密度及其控制技术的研究[J]. 林业勘查设计, 1995, **24** (4): 1－5.

[6] 刘玉明. 马尾松人工经营密度模型及其应用的研究[J]. 华东森林经理, 1997, **11** (3): 53－56, 48.

[7] 丁贵杰. 马尾松人工林密度变化规律和密度调控模型研究[J]. 贵州农学院丛刊, 1997, **15** (3): 8－14.

[8] 丁贵杰. 贵州杉木人工林生长收获模型系统的研究[J]. 东北林业大学学报, 1997, **25** (5): 44－49.

[9] 尹泰龙. 林分密度控制图[M]. 北京: 中国林业出版社, 1984. 1－5.

[10] 田天雄. 黔中地区马尾松林抚育间伐技术研究阶段报告[J]. 贵州农学院丛刊, 1984, **2** (4): 47－52.

[11] 周政贤. 马尾松造林密度试验报告 [J]. 贵州农学院丛刊, 1984, **2** (4): 32－46.

Optimal density control model of planted timber forests

HUANG Jia-rong

(Department of Forestry, Agricultural College, Guizhou University, Guiyang 550025, Guizhou, China)

Abstract: Regarding the parabola density effect model as presupposition, in accordance with the growing traits of the planted timber forests, the paper finds density control model by optimal control method and finds the solution with dynamic programming. The model has the characteristics with variable power times, stronger adaptability, mobile thinning interval and convenient use. The model is used in masson pine planted timber forests in Guizhou Province. The outcome shows that the computing results tall with the growing law of the planted timber forests, and accord with practical experiment.

Key words: optimal control; dynamic programming; mobile interval planted timber forests; stand density