

单梁式简支斜梁桥的斜梁内力分析

杨云芳

(浙江林学院, 临安 311300)

摘要 本文以单梁式简支斜梁桥为对象, 分析、研究了其受力特性, 导出斜梁内力的计算公式。通过分析比较可知, 斜梁桥的斜梁弯矩小于同跨径正梁桥的正梁弯矩, 斜梁跨中的弯矩值随着夹角的减小而减小。根据斜梁受弯扭耦合作用的特性, 其横截面的型式以抗扭能力大的箱形截面为佳。

关键词 简支梁; 内力; 桥

中图分类号 U448.217

在过去的道路建设中, 正梁桥的利用较为普遍。随着交通的发展, 道路网现代化建设的需要, 斜梁桥的建造日益增多。然而, 对于斜梁桥的斜梁内力研究, 有待进一步深入。本文以单梁式简支斜梁桥为对象, 就其受力特性, 梁的横截面型式和斜梁内力的计算公式进行了分析和推导, 并与正梁桥的正梁内力作了比较。现将分析比较结果报道如下。

1 单梁式简支斜梁桥的受力特性及计算简图

1.1 受力特性

将作用于桥面上的竖向荷载向弯曲中心简化, 得到一个竖向荷载 P 和一个力偶矩 m 。斜梁在竖向荷载 P 作用下产生弯曲并伴有扭转, 在力偶矩 m 作用下产生扭转并伴有弯曲。由于简支斜梁的轴线与支承线斜交, 其内力的计算属于空间力系问题。

1.2 计算简图

根据结构特点及受力特性, 可得出单梁式简支斜梁桥的计算简图(图 1)。

2 斜梁的内力计算公式

单梁式简支斜梁桥为一个一次超静定结构。以力法计算^[1], 解除 B 端的扭转约束, 代之多余未知力 X_1 , 得基本体系如图 2。内力的正、负号按图 3 所示的内力为正, 反之为负; 外力, 支座反力按图 4 所示的方向为正。

2.1 竖向荷载 P 作用下斜梁的内力计算公式

2.1.1 基本体系在竖向荷载 P 作用下的内力 根据图 4, 由静力平衡条件, 求得

收稿日期: 1995-09-04

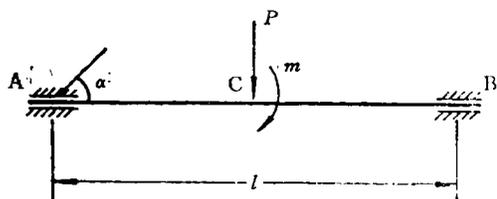


图 1 计算简图

Fig. 1 Calculating diagram

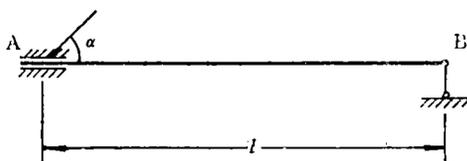


图 2 基本体系

Fig. 2 Basic system

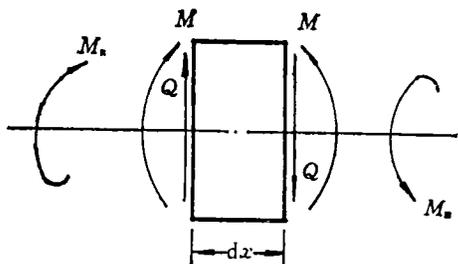


图 3 正值内力

Fig. 3 Positive internal forces

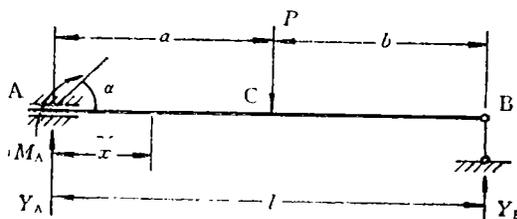


图 4 基本体系在 P 作用下

Fig. 4 Basic system under the reaction of vertical load P

$$\begin{cases} Y_A = \frac{Pb}{l} \\ Y_B = \frac{Pa}{l} \\ M_A = 0. \end{cases} \quad (a)$$

式中： Y_A 、 Y_B 分别为支座 A、B 处的竖向反力； M_A 为支座 A 处的扭转反力； P 为竖向荷载； l 为桥的计算跨径； a 、 b 分别为竖向荷载 P 距支座 A、B 的距离。

由弯矩方程、剪力方程和扭矩方程，求得

AC 段的内力 ($0 \leq x \leq a$)

$$\begin{cases} M'_P = \frac{Pb}{l} x \\ Q'_P = \frac{Pb}{l} \\ M'_{nP} = 0. \end{cases} \quad (b)$$

CB 段的内力 ($a \leq x \leq l$)

$$\begin{cases} M'_P = \frac{Pa}{l} (l-x) \\ Q'_P = -\frac{Pa}{l} \\ M'_{nP} = 0. \end{cases} \quad (c)$$

式中： M'_P 、 Q'_P 、 M'_{nP} 分别为基本体系在竖向荷载 P 作用下斜梁截面上的弯矩、剪力和扭矩； x 为截面距支座 A 的距离。

2.1.2 基本体系在多余未知力 X_1 作用下的内力 根据图 5, 由静力平衡条件, 求得

$$\begin{cases} \bar{Y}_A = 0 \\ \bar{Y}_B = 0 \\ \bar{M}_A = X_1 \end{cases} \quad (d)$$

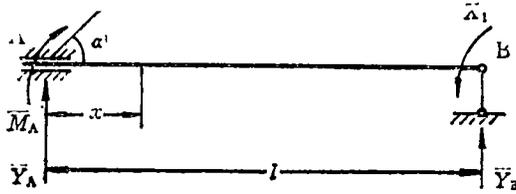


图 5 基本体系在 X_1 作用下

Fig. 5 Basic system under the reaction of unknow force X_1

由弯矩方程、剪力方程和扭矩方程, 并令图 5 中的多余未知力 $X_1 = 1$, 求得

$$\begin{cases} \bar{M}_1 = \cos \alpha \\ \bar{Q}_1 = 0 \\ \bar{M}_{n1} = \sin \alpha \end{cases} \quad (e)$$

式中: \bar{M}_1 , \bar{Q}_1 , \bar{M}_{n1} 分别为基本体系在单位力 $X_1 = 1$ 作用下斜梁截面上的弯矩、剪力和扭矩, α 为斜梁的轴线与支承线的夹角。

2.1.3 计算多余未知力 X_1 力法方程为

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad (f)$$

计算系数和自由项

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_0^l \frac{\bar{M}_1^2}{EI_z} dx + \int_0^l \frac{\bar{M}_{n1}^2}{GI_P} dx \\ &= \int_0^l \frac{1}{EI_z} \cos^2 \alpha dx + \int_0^l \frac{1}{GI_P} \sin^2 \alpha dx \\ &= \frac{l}{EI_z} \cos^2 \alpha + \frac{l}{GI_P} \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

令 $k = \frac{EI_z}{GI_P}$, 整理后得 δ_{11} 为

$$\delta_{11} = \frac{l}{EI_z} \cos \alpha (1 + k \operatorname{tg}^2 \alpha) \quad (g)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \Sigma \int \frac{\bar{M}_1 M'_P}{EI_z} dx + \Sigma \int \frac{\bar{M}_{n1} M'_{nP}}{GI_P} dx \\ &= \int_0^a \frac{1}{EI_z} \cos \alpha \cdot \frac{Pb}{l} x dx + \int_a^l \frac{1}{EI_z} \cos \alpha \cdot \frac{Pa}{l} (l-x) dx \\ &= \frac{Pab}{2EI_z} \cos \alpha \end{aligned} \quad (h)$$

将式(g), (h)代入(f)式, 解力法方程, 得

$$X_1 = -\frac{Pab}{l \cos \alpha} K. \quad (i)$$

式中: X_1 为多余未知力; E 为材料的弹性模量; G 为材料的剪切弹性模量; EI_x 为梁的抗弯刚度; GI_P 为梁的抗扭刚度; $k = \frac{EI_x}{GI_P}$ 为刚度比; 参数 $K = \frac{1}{2(1+k \operatorname{tg}^2 \alpha)}$ 。

2.1.4 计算斜梁在竖向荷载 P 作用下的内力 按下列叠加公式:

$$\begin{cases} M_P = \bar{M}_1 X_1 + M'_P \\ Q_P = \bar{Q}_1 X_1 + Q'_P \\ M_{n,P} = \bar{M}_{n,1} X_1 + M'_{n,P} \end{cases} \quad (1)$$

将式(b), (c), (e)和(i)代入公式(1), 经整理后可得 AC 段的内力($0 \leq x \leq a$)

$$\begin{cases} M_P = \frac{Pb}{l}(x - aK) \\ Q_P = \frac{Pb}{l} \\ M_{n,P} = -\frac{Pab}{l} K \operatorname{tg} \alpha \end{cases} \quad (2a)$$

CB 段的内力($a \leq x \leq l$)

$$\begin{cases} M_P = \frac{Pa}{l}(l - x - Kb) \\ Q_P = -\frac{Pa}{l} \\ M_{n,P} = -\frac{Pab}{l} K \operatorname{tg} \alpha \end{cases} \quad (2b)$$

式中: M_P , Q_P , $M_{n,P}$ 分别为斜梁在竖向荷载 P 作用下载面上的弯矩、剪力和扭矩, 其他符号的含义同前。

2.2 力偶矩荷载 m 作用下斜梁的内力计算公式

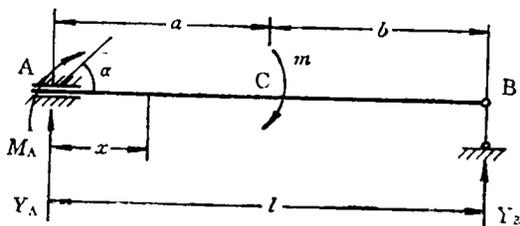
2.2.1 基本体系在力偶矩荷载 m 作用下的内力 根据图 6, 由静力平衡条件, 求得

$$\begin{cases} Y_A = -\frac{m}{l} \operatorname{ctg} \alpha \\ Y_B = \frac{m}{l} \operatorname{ctg} \alpha \\ M_A = \frac{T}{\sin \alpha} \end{cases} \quad (j)$$

由弯矩方程、剪力方程和扭矩方程, 求得 AC 段的内力($0 \leq x \leq a$)

$$\begin{cases} M'_m = \frac{m}{l}(l - x) \operatorname{ctg} \alpha \\ Q'_m = -\frac{m}{l} \operatorname{ctg} \alpha \\ M'_{n,m} = m \end{cases} \quad (k)$$

CB 段的内力($a \leq x \leq l$)

图6 基本体系在 m 作用下Fig. 6 Basic system under the reaction of force coupling moment load m

$$\begin{cases} M'_m = \frac{m}{l}(l-x)\text{ctg}\alpha \\ Q'_m = -\frac{m}{l}\text{ctg}\alpha \\ M'_{nm} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

式中： m 为力偶矩荷载； M'_m 、 Q'_m 、 M'_{nm} 分别为基本体系在力偶矩荷载 m 作用下的弯矩、剪力和扭矩。

2.2.2 计算多余未知力 X_1 力法方程为

$$\delta_1 X_1 + \Delta_{1m} = 0 \quad (m)$$

计算系数和自由项

系数 δ_{11} 同(g)式。

$$\begin{aligned} \Delta_{1m} &= \Sigma \int \frac{\bar{M}_1 M'_{nm}}{EI_z} dx + \Sigma \int \frac{\bar{M}_{n1} M'_{nm}}{GI_p} dx \\ &= \int_0^l \frac{1}{EI_z} \cos \alpha \cdot \frac{m}{l}(l-x)\text{ctg}\alpha dx + \int_0^a \frac{1}{GI_p} \sin \alpha \cdot m dx \\ &= \frac{ml}{2EI_z} \cos \alpha \text{ctg}\alpha + \frac{ma}{GI_p} \sin \alpha \\ &= \frac{ml \cos^2 \alpha}{2EI_z \sin \alpha} \left(1 + \frac{2ak}{l} \text{tg}^2 \alpha\right). \end{aligned} \quad (n)$$

将式(g)，式(n)，代入(m)式，解力法方程得

$$X_1 = -\frac{Km}{\sin \alpha} \left(1 + \frac{2ak}{l} \text{tg}^2 \alpha\right). \quad (o)$$

2.2.3 计算斜梁在力偶矩荷载 m 作用下的内力 按下列叠加公式：

$$\begin{cases} M_m = \bar{M}_1 X_1 + M'_{nm} \\ Q_m = \bar{Q}_1 X_1 + Q'_m \\ M_{nm} = \bar{M}_1 X_1 + M'_{nm}. \end{cases} \quad (3)$$

将式(e)，(h)，(i)和(o)代入公式(3)，整理后可得

AC段的内力($0 \leq x \leq a$)

$$\begin{cases} M_m = \frac{m}{l} \operatorname{ctg} \alpha [l - x - K(l + 2ak \operatorname{tg}^2 \alpha)] \\ Q_m = -\frac{m}{l} \operatorname{ctg} \alpha \\ M_{nm} = m \left[1 - K \left(1 + \frac{2ak}{l} \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \right]. \end{cases} \quad (4a)$$

CB 段的内力 ($a \leq x \leq l$)

$$\begin{cases} M_m = \frac{m}{l} \operatorname{ctg} \alpha [l - x - k(l + 2ak \operatorname{tg}^2 \alpha)] \\ Q_m = -\frac{m}{l} \operatorname{ctg} \alpha \\ M_{nm} = -mK \left(1 + \frac{2ak}{l} \operatorname{tg}^2 \alpha \right). \end{cases} \quad (4b)$$

式中: M_m , Q_m , M_{nm} 分别为斜梁在力偶矩荷载 m 作用下截面上的弯矩、剪力和扭矩, 其他符号的含义同前。

3 单梁式简支斜梁桥的斜梁内力计算方法

先计算斜梁横截面的弯曲中心, 再将作用于桥面上的荷载向弯曲中心简化, 得到一个竖向荷载 P 和一个力偶矩荷载 m 。然后按公式(2 a)和(2 b)及公式(4 a)和(4 b), 分别求出斜梁在竖向荷载 P 和力偶矩荷载 m 作用下的截面内力 M_P , Q_P , M_{nP} 和 M_m , Q_m , M_{nm} , 最后两者叠加, 即为单梁式简支斜梁桥斜梁截面上的内力。令公式(2 a)和(2 b)中的 $P = 1$ 及公式(4 a)和(4 b)中的 $m = 1$, 即为单梁式简支斜梁桥斜梁内力的影响线计算公式。

4 斜梁内力与正梁内力的比较

4.1 同跨径简支正梁桥的正梁内力计算公式

将公式(2 a)和(2 b)及公式(4 a)和(4 b)求极限 ($\alpha \rightarrow 90^\circ$), 可得正梁在竖向荷载 P 作用下的内力计算公式。

AC 段的内力 ($0 \leq x \leq a$)

$$\begin{cases} M_P^0 = \frac{Pb}{l} x \\ Q_P^0 = \frac{Pb}{l} \\ M_{nP}^0 = 0. \end{cases} \quad (5a)$$

CB 段的内力 ($a \leq x \leq l$)

$$\begin{cases} M_P^0 = \frac{Pa}{l} (l - x) \\ Q_P^0 = -\frac{Pa}{l} \\ M_{nP}^0 = 0. \end{cases} \quad (5b)$$

正梁在力偶矩荷载 m 作用下的内力计算公式如下。

AC 段的内力 ($0 \leq x \leq a$)

$$\begin{cases} M_m^0 = 0 \\ Q_m^0 = 0 \\ M_{nm}^0 = m \left(1 - \frac{a}{l}\right) \end{cases} \quad (6a)$$

CB 段的内力 ($a \leq x \leq l$)

$$\begin{cases} M_m^0 = 0 \\ Q_m^0 = 0 \\ M_{nm}^0 = -\frac{m}{l} a \end{cases} \quad (6b)$$

式中: M_P^0, Q_P^0, M_{nP}^0 分别为同跨径简支正梁桥的正梁在竖向荷载 P 作用下的弯矩、剪力和扭矩; M_m^0, Q_m^0, M_{nm}^0 分别为同跨径简支正梁桥的正梁在力偶矩荷载 m 作用下的弯矩、剪力和扭矩; 其他符号的含义同前。

4.2 分析与比较

设单梁式简支斜梁桥的计算跨径为 l , 荷载 P, m 作用在跨中。按上述公式分别求出来角 $85^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ 及 90° 时梁跨中截面和端点截面的内力。取刚度比 $k = \frac{EI_s}{GI_p} = 1$, 计算结果见表 1~2。

表 1 竖向荷载 P 作用下梁的内力值

Table 1 Internal forces value of beam under the reaction of vertical load P

梁式	夹角/度	跨中截面内力				端点截面内力			
		M_P	$Q_{P左}$	$Q_{P右}$	M_{nP}	M_P	Q_{PA}	Q_{PB}	M_{nP}
斜梁	85	0.2491 Pl	0.5 P	-0.5 P	0.0109 Pl	-0.0001 Pl	0.5 P	-0.5 P	0.0109 Pl
	60	0.2188 Pl	0.5 P	-0.5 P	0.0543 Pl	-0.0313 Pl	0.5 P	-0.5 P	0.0543 Pl
	45	0.1875 Pl	0.5 P	-0.5 P	0.0625 Pl	-0.0625 Pl	0.5 P	-0.5 P	0.0625 Pl
正梁	90	0.25 Pl	0.5 P	-0.5 P	0	0	0.5 P	-0.5 P	0

表 2 力偶矩荷载 m 作用下梁的内力值

Table 2 Internal force value of beam under the reaction of force coupling moment load m

型式	夹角/度	跨中截面内力				端点截面内力				
		M_m	Q_m	$M_{nm左}$	$M_{nm右}$	M_{mA}	M_{mB}	Q_m	M_{nmA}	M_{nmB}
斜梁	85	0	-0.0875 m/l	0.5 m	-0.5 m	0.0437 m	-0.0437 m	-0.0875 m/l	0.5 m	-0.5 m
	60	0	-0.5774 m/l	0.5 m	-0.5 m	0.2887 m	-0.2887 m	-0.5774 m/l	0.5 m	-0.5 m
	45	0	- m/l	0.5 m	-0.5 m	0.5 m	-0.0005 m	- m/l	0.5 m	-0.5 m
正梁	90	0	0	0.5 m	-0.5 m	0	0	0	0.5 m	-0.5 m

由表 1 可知, 当刚度比 k 不变时, 在竖向荷载 P (在跨中) 作用下, 斜梁的跨中弯矩小于同跨径正梁的弯矩, 斜梁的跨中弯矩值随着夹角 α 的减小而减小, 端点截面的弯矩绝对值随着夹角 α 的减小而增大, 而正梁端点截面的弯矩为零。斜梁的剪力值与夹角无关, 即斜梁与正梁的剪力值相等。斜梁的扭矩值随着夹角 α 的增大而增大, 而正梁在竖向荷载 P 作用下不产生扭矩。

由表 2 可知, 当刚度比 k 不变时, 在力偶矩荷载 m (在跨中) 作用下, 斜梁和正梁的跨中截面均不产生弯矩。斜梁端点截面的弯矩绝对值随着夹角 α 的减小而增大, 而正梁端点截面的弯矩为零。斜梁的剪力绝对值随着夹角 α 的减小而增大, 而正梁的剪力值为零。斜梁与正梁在力偶矩荷载 m 作用下均产生扭矩, 其值相等。

根据斜梁受弯扭藕合作用的特性, 从斜梁的内力计算公式可知, 增大斜梁的抗扭刚度, 可减小斜梁的弯矩值。因此, 单梁式简支斜梁桥的斜梁截面型式以抗扭能力大的箱形截面为佳。

参 考 文 献

- 1 清华大学建筑工程系. 结构力学. 北京: 中国建筑工业出版社, 1981. 238~250

Yang Yunfang (Zhejiang Forestry College, Lin'an 311300, PRC). **Analysis on Internal Forces in Oblique Beam of Single-beam and Simple Strut Oblique Bridge.** *J Zhejiang For Coll*, 1995, 12(4):404~411

Abstract: The single-beam and simple strut oblique bridge was used to analyse the character of bearing force, and the formula for internal force in oblique beam was conducted. According to analysis and research, moment of turn on oblique beam of oblique bridge was less than that on ridge purlin of ridge bridge in the same span. With reducing of angle α , the value of moment of turn on oblique beam span reduced. According to the characters of moment of turn on oblique beam coupling reaction, the box section that had more resistant ability on moment of force was better.

Key words: simple beams; internal forces; bridges