浙 江 林 学 院 学 报 1999，**16**(3)：308～310
*Journal of Zhejiang Forestry College*

文章编号：1000-5692(1999)03-0308-03

# 一类树的最小正根

徐光辉
(浙江林学院基础部，浙江临安 311300)

摘要：设 $K^q_{1,q}$ 为 $K_{1,q}$ 的 $q$ 个悬挂点各接出 1 条悬挂边而得的 $2q+1$ 阶树，又若 $T$ 是边独立数为 $q$ 的 $2q+1$ 阶树，则 $q\geqslant 2$ 时有：① $\lambda_q(T)\leqslant\lambda_q(K^q_{1,q})$，等号成立当且仅当 $T\cong K^q_{1,q}$；② $\lambda_q(K^q_{1,q})=1$。另外，对一般边独立数为 $q$ 的 $n$ 阶树，提出了 1 个类似的猜想。图 2 参 4

关键词：树(数学)；边独立数；特征值；最小正根
中图分类号：O157.5 文献标识码：A

设 $G$ 是 $n$ 个顶点的简单图，其邻接阵为 $A$。$G$ 的特征多项式 $P(G;\lambda)$ 就是 $A$ 的特征多项式，即 $P(G,\lambda)=\det(\lambda I-A)$，并简记为 $P(G)$。$G$ 的特征值可按大小顺序排列为 $\lambda_1(G)\geqslant\lambda_2(G)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(G)$。现设 $T$ 是边独立数为 $q$ 的 $n$ 阶树，则 $\lambda_q(T)$ 为其最小正根。特别地，若 $n=2q$，则 $T$ 为具有完美匹配的 $2q$ 阶树，对此情形文献[1]证明了：$\lambda_q(T)\geqslant\lambda_q(p_{2q})$，等号成立当且仅当 $T\cong P_{2q}$；而文献[2]得到结论：$\lambda_q(T)\leqslant\lambda_q(T^*)$，等号成立当且仅当 $T\cong T^*$。这里 $T^*$ 是由路 $p_q$ 的每个顶点各接出一条悬挂边而得的 $2q$ 阶树；对边独立数为 $q$ 的 $2q+1$ 阶树的最小正根，文献[3]证明了 $\lambda_q(T)\geqslant\lambda_q(P^1_{2q})$，等号成立当且仅当 $T\cong P^1_{2q}$。这里 $P^1_{2q}$ 为 $P_{2q}$ 的一个邻悬挂点上引出一条新悬挂边而得的 $2q+1$ 阶树。本文将研究在此情形下其最小正根的上界。首先记 $K^q_{1,q}$ 为 $K_{1,q}$ 的 $q$ 个悬挂点各接出一条悬挂边而得的树，如图 1 所示。

## 1 引理

首先，我们给出以下引理。

引理 1 设 $V'$ 为简单图 $G$ 的顶点集 $V(G)$ 的子集，$|V(G)|=n$，$|V'|=k$，$G-V'$ 为 $G$

收稿日期：1998-09-24；修回日期：1998-01-04
作者简介：徐光辉(1965－)，男，浙江东阳人，讲师，硕士，从事图谱理论及应用研究。

中去掉$V'$中所有顶点及关联边而得的子图，则

$$\lambda_i(G)\geqslant\lambda_i(G-V')\geqslant\lambda_{i+k}(G)\qquad(1\leqslant i\leqslant n-k)。$$

证明　见文献[4]。

引理2　$\lambda_q(K_{1,q}^{q})=1\qquad(q\geqslant2)$。

证明　$K_{1,q}^{q}$如图1所示，则由引理1可知

$$\lambda_q(K_{1,q}^{q}-u)\leqslant\lambda_q(K_{1,q}^{q})\leqslant\lambda_{q-1}(K_{1,q}^{q}-u)。$$

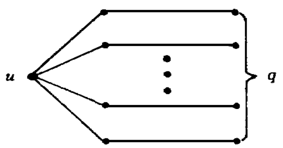


图1　$K_{1,q}^{q}$

Figure 1　$K_{1,q}^{q}$

又 $\lambda_{q-1}(K_{1,q}^{q}-u)=\lambda_q(K_{1,q}^{q}-u)=1$。故必有

$$\lambda_q(K_{1,q}^{q})=1。$$

引理3　设$T$是边独立数为$q$的$2q+1$阶树，$q\geqslant4$。若$T\ncong K_{1,q}^{q}$，则必存在一点$u\in V(T)$，使得$T-u=T_1\cup K_1$；这里$T_1$是边独立数为$q-1$的$2q-1$阶树且$T_1\ncong K_{1,q-1}^{q-1}$。

证明：首先$T$必有一个邻悬挂点，设为$u$，使$d(u)=2$，则$T-u=T_1\cup K_1$且$T_1$是边独立数为$q-1$的$2q-1$阶树。下面考虑树$T_1$：

（1）若$T_1\ncong K_{1,q-1}^{q-1}$，则引理已得证。

（2）若$T_1\cong K_{1,q-1}^{q-1}$，则$T$必为如图2所示的树之一。此时只要另取一邻悬挂点$v$，$d(v)=2$。

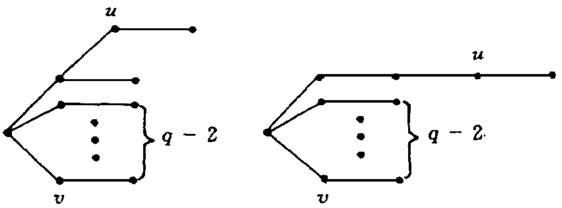


图2　$T$

Figure 2　$T$

点$u$与$v$的位置如图2所示，则$T-v=T'_1\cup K_1$，显然$T'_1$仍是边独立数为$q-1$的$2q-1$阶树，又由于$q\geqslant4$，因而此时必有$T'_1\ncong K_{1,q-1}^{q-1}$。从而此引理也成立。

引理4　设$T$是边独立数为$q$的$2q+1$阶树，$q\geqslant2$，若$T\ncong K_{1,q}^{q}$，则$\lambda_q(T)<1$。

证明　对$q$用归纳法。

当$2\leqslant q<4$时，由文献[4]可知结论成立。

现设$q<s$时结论成立（$s\geqslant4$）。则对于$q=s$，由引理3，存在一点$u\in V(T)$，使得$T-u=T_1\cup K_1$，其中$T_1$是边独立数为$s-1$的$2s-1$阶树且$T_1\ncong K_{1,s-1}^{s-1}$。又由引理1可知

$$\lambda_s(T)\leqslant\lambda_{s-1}(T-u)。$$

而由假设可知

$$\lambda_{s-1}(T-u)=\lambda_{s-1}(T_1)<1。$$

故 $\lambda_s(T)<1$。

## 2　结论

利用引理2和引理4可得以下结果。

定理　设$T$是边独立数为$q$的$2q+1$阶树，$q\geqslant2$，则

（1）$\lambda_q(T)\leqslant\lambda_q(K_{1,q}^{q})=1$。

等号成立当且仅当$T\cong K_{1,q}^{q}$。

（2）$\lambda_q(K_{1,q}^{q})=1$。

证明 由引理 2 知结论(2)成立。又由引理 4，当 $T \not\cong K_{1,q}^{q}$时，$\lambda_q(T) < 1$，故必有

$$\lambda_q(T) < \lambda_q(K_{1,q}^{q})$$

从而结论(1)也成立。定理得证。

顺便指出，当 $q=1$ 时，只有唯一的一棵树即路 $P_3$，且 $\lambda_1(P_3)=\sqrt{2}$。

## 3 猜想

对边独立数为 $q$ 的 $n$ 阶树，$n \geqslant 2q+1$。首先设 $n-q-1=kq+r$，$0 \leqslant r \leqslant q$；并且记 $K_{1,q}^{n-q-1}$为$K_{1,q}$中的$r$ 个悬挂点都分别接出$k+1$条悬挂边，而另外 $q-r$ 个悬挂点都分别接出 $k$ 条悬挂边而得的$n$ 阶树。则有如下猜想：

猜想 若 $T$ 是边独立数为$q$ 的$n$ 阶树，并且 $n \geqslant 2q+1$，则

$$\lambda_q(T) \leqslant \lambda_q(K_{1,q}^{n-q-1})。$$

另外，不难看出，当 $0 \leqslant r \leqslant q-1$ 时，必有

$$\lambda_q(K_{1,q}^{n-q-1})=\sqrt{k}。$$

而 $r=q-1$ 时，则有

$$\sqrt{k} \leqslant \lambda_q(K_{1,q}^{n-q-1}) \leqslant \sqrt{k+1}。$$

参考文献：

1 Godsil C. Inverse of trees[J]. *Combinatorica*, 1985, **5**(1): 33~39.

2 邵嘉裕，洪渊．完美匹配树最小正特征值的界[J]．科学通报，1991，**18**：1 361~1 364.

3 徐光辉．奇数阶树的最小正根[J]．烟台师范学院学报(自然科学版)，1997，**13**(增刊)：37~38.

4 Cvetković D, Doob M, Sachs H. *Spectra of Graphs*[M]. New York: Academic Press, 1980. 19~291.

# On smallest positive eigenvalues of a kind of tree

XU Guang-hui

(Basic Course Division, Zhejiang Forestry College, Lin'an 311300, China)

**Abstract**: Let $K_{1,q}^{q}$ be a tree on $2q+1$ vertices from $K_{1,q}$ by joining a new end-vertex to each vertex with degree one of $K_{1,q}$. In this paper, the following results are obtained: if $T$ is a tree on $2q+1$ vertices with the edge independence number $q$, when $q \geqslant 2$, $\lambda_q(T) \leqslant \lambda_q(K_{1,q}^{q})$, and the equality holds if and only if $T \cong K_{1,q}^{q}$, $\lambda_q(K_{1,q}^{q})=1$. Furthermore, a similar conjecture is given for the tree on $n$ vertices with edge independence number $q$.

**Key words**: tree (mathematics); edge independence number; eigenvalue; smallest positive eigenvalue