

文章编号: 1000-5692(2001)01-0085-04

Gompertz 增长模型在林产品产值预测中的应用

余永清¹, 付顺华²

(1. 浙江林学院 信息工程与基础科学系, 浙江 临安 311300; 2. 浙江林学院 资源与环境系, 浙江 临安 311300)

摘要: 应用增长模型的理论和方法, 根据《临安五十年》中的统计数据建立 Gompertz 增长模型 $\hat{y}=6 \exp[-5.802 0 e^{-0.3679 t}]$, 并对临安市的林产品的产值进行预测。预测结果与实际值的相对误差仅为 0.008 2%, 相关指数达到 0.999 2, 表明模型与实际值拟合程度很好, 达到了较高的精度。预测方法简便易行, 具有实用意义。模型也可用来预测经济林产量和资源消耗量等, 为林业生产、经营及技术更新提供决策依据, 提高管理上的宏观调控能力。图 3 表 1 参 4

关键词: Gompertz 增长模型; 最小二乘法; 林产品; 预测
中图分类号: F224.0; SF937 **文献标识码:** A

增长模型在生物、生态、经济和医药等领域的预测应用已多见报道。一般的增长规律具有这样的特点: 即在开始之初增长均较缓慢, 然后进入快速增长阶段, 最后又进入缓慢增长时期。这种规律在林业生产经营中表现较突出。Gompertz 增长模型对“S”型增长规律的拟合预测较适用。现以 Gompertz 模型对林产品产值进行预测, 探讨其在林业生产中的应用。

1 材料与方法

1.1 材料来源

数据来源于《临安五十年》中的农林牧渔业分项产值表。

1.2 建模机理

在生产过程的初始阶段, 人们对林产品生产技术不很熟悉, 生产力水平低下, 从而林产品的产值增长较为缓慢; 当人们逐渐认识并熟练掌握生产技术, 生产力水平不断提高以后, 林产品产值的增长速度迅速加快, 但是, 当人们已较好掌握了生产技术以后, 尽管产值还在增加, 但增长速度会减缓, 因为自然资源的利用是有限的, 因而限制了林产品产值的无限增长。林产品产值的这种变化趋势, 比较适合于 Gompertz 增长模型。

若增长率用微分方程表示^[1]:

$$\frac{dy}{dt} = ky \ln \frac{y^*}{y} \tag{1}$$

式中: y 为林产品的产值, k, y^* 均为大于零的常数。求方程 (1) 的通解。得

$$\ln \frac{y^*}{y} = ce^{-kt} (c > 0) \tag{2}$$

即

$$y = y^* \exp(-ce^{-kt}). \quad (3)$$

(3) 式所确定的曲线为 Gompertz 曲线, 类似于 S 形。将 (2) 代入 (1) 得

$$\frac{dy}{dt} = cke^{-kt}y. \quad (4)$$

由于 $\frac{dy}{dt} > 0$, 说明函数 y 是单调递增的, 从而刻划了 y 永远增加的特性。但是当 t 无限增大时, y 有极限 y^* 。令 $\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, 可求得曲线拐点为

$$t = \frac{1}{k} \ln c, \quad y = \frac{1}{e} y^* \approx 0.368 2 y^*. \quad (5)$$

当 $0 < t < t$ 时, $\frac{d^2y}{dt^2} > 0$; 当 $t > t$ 时, $\frac{d^2y}{dt^2} < 0$ 。这就是说函数 $\frac{dy}{dt}$ 在拐点左边单调增加, 在拐点右边单调减少。从而反映了函数 y 的变化速度, 在拐点的左边越来越快, 在拐点的右边越来越慢。

若将 t 代入 (4) 可知 y 的最大变化速度为

$$y_t = cke^{\ln c} y. \quad (6)$$

于是描绘出 Gompertz 曲线和 y 的变化速度如图 1~2 所示。

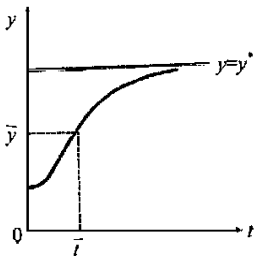


图 1 Gompertz 增长曲线

Figure 1 The increase curve of Gompertz

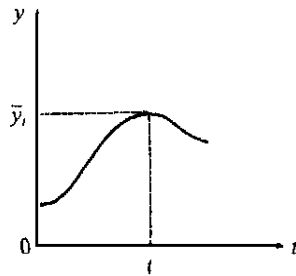


图 2 曲线变化速度

Figure 2 The varying speed of increase curve

可见, Gompertz 曲线较好地反映了林产品产值的增长过程, 所以采用 Gompertz 曲线作为预测模型是比较合适的。

1.3 模型中参数的确定

预测结果的可信度如何, 关键取决于模型中参数 y^* , c 与 k 的选取。 y^* 是 y 的增长极限, 或称饱和量, 可根据经验取值。对于 c 与 k 可利用一元线性回归方法确定。为此, 将 (2) 式两边取对数

$$\ln \ln \frac{y^*}{y} = \ln c - kt. \quad (2')$$

令 $x = \ln \ln \frac{y^*}{y}$, $a = \ln c$, $b = -k$, 则 x 化为 t 的随机线性模型: $x = a + bt$ 。

若 t, y 的 n 组实测值, 应用最小二乘法及微积分中的极值求法可得公式^[2]

$$\hat{b} = \frac{l_{tx}}{l_{tt}}, \quad \hat{a} = \bar{x} - \hat{b} \bar{t}.$$

可以确定 a, b 的估计值 $\hat{a}, \hat{b}$ 。其中:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i; \quad (8)$$

$$l_{tt} = \sum_{i=1}^n t_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2; \quad (9)$$

$$l_{tx} = \sum_{i=1}^n t_i x_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right). \quad (10)$$

然后由 $c = e^{\hat{a}}$, $k = -\hat{b}$ 即可确定参数 c 与 k 的估计值 $\hat{c}, \hat{k}$ 。于是得林产品产值预测模型。

$$\hat{y}=y^{*}\exp[-\hat{c}\hat{e}^{-\hat{k}t}].$$

(11)

1.4 模型建立

根据《临安五十年》提供的林产品产值的数据（表 1）预测其增长趋势。
设时间 t （a）依次取值 1, 2, ..., 8, 林产品产值

极限值 y^{*} 取 6（亿元），则利用 $x=\ln\ln\frac{y^{*}}{y}$ （其中 $y^{*}=6$ ），得 x 的对应值（表 1）。

经计算得 $\bar{t}=4.5, \bar{x}=0.102\ 6, l_{tt}=42, l_{tx}=-15.4520, \hat{b}=-0.367\ 9, \hat{a}=1.758\ 2, \hat{c}=5.802\ 0, \hat{k}=0.367\ 9$ 。所以林产品产值预测模型：
$$\hat{y}=6\exp\left[-5.802\ 0e^{-0.367\ 9t}\right].$$
 (12)

表 1 年度 t 的林产品产值

Table 1 The t years output of forestry products

年度	t/a	y (产值) / 亿元	x
1990	1	0.26	1.143 9
1991	2	0.59	0.841 3
1992	3	0.64	0.805 6
1993	4	1.21	0.470 7
1994	5	1.58	0.288 4
1995	6	2.85	-0.295 1
1996	7	4.02	-0.915 1
1997	8	4.82	-1.518 7

2 模型检验

2.1 相对误差

可以通过检验，得到的模型拟合度、显著性都很好。作为简单分析，可以比较 1998 年的拟合值，将 $t=9$ 代入（6）得 $\hat{y}=4.855\ 6$ ，而实际值 $y=4.855\ 2$ ，相对误差仅为 0.008 2%，预测值可用。

2.2 相关指数

计算相关指数^[3]

$$R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^8(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^8(y_i-\bar{y}_i)^2}=1-\frac{1.229\ 3}{1\ 582\ 546\ 5}\approx0.999\ 2.$$

由于 R^2 的值非常接近于 1，说明回归方程（10）与实际值拟合程度很好，因此曲线（11）有实际应用价值。

3 结果与分析

由（5）式可求出曲线（10）的拐点横坐标为：

$$\hat{t}=\frac{\hat{a}}{\hat{k}}=\frac{1.758\ 2}{0.367\ 9}\approx4.639\ 1.$$

令 $t=5$ 时， $\hat{y}=2.386\ 5$ ；令 $t=15$ 时， $\hat{y}=5.861\ 9$ ；令 $t=20$ 时， $\hat{y}=5.977\ 8$ 。说明 1994 年前林产品产值是加速增长，1994 年达到最高峰，产值可达到 2 386 5 亿元。这以后产值虽然在增加，但增长速度逐步放慢，到 2009 年也仅有 5.977 8 亿元。

模型中的参数 y^{*} 的确定对预测结果的正确性有直接关系。在一定的时间段中，因受生产技术、消费水平和自然资源等条件的限制，经济总量达到相对饱和状态，林产品产值应有一个固定饱和量 y^{*} 。因此在产值高速增长以后，增长趋缓时，应采取加大科技投入，大力开发新产品，加强企业内部管理，积极的营销策略等措施，使林产品产值上一个新台阶。在预测模型中可取不同的饱和量 y^{*} ，从而使林产品产值达到复合型增长曲线的效果^[4]（图 3）。

本模型是建立在一定时空的观察资料之上的，因而不可避免地有其历史和空间局限性，当时间或空间发生变化有必要对模型的有效性进行检查。模型的维护是防止模型老化，及时调整参数以使模型发挥正常作用。这有待进一步探讨。

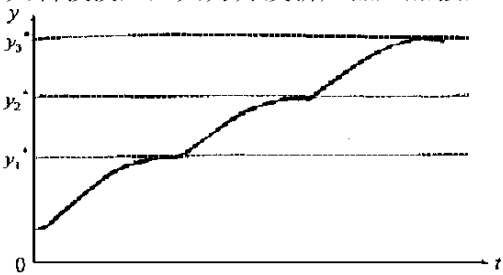


图 3 复合型增长模型曲线

Figure 3 The curve multiple increase model

4 小结

应用 Gompertz 增长模型对林产品产值增长进行预测，从拟合的误差分析及相关指数来看，模型达到很高的精度要求，可以用来预测。该预测方法简便易行，具有很强的实用性和较高的预测精度。同样，这种方法也可以预测一些经济林产量、资源消耗量和林产品各分类产品产值等，值得推广。

参考文献：

[1] 毛立本，于清文，姜玉华，等. 几种耐用消费品需求函数和需求预测的研究[J]. 经济研究，1981，(10)：72—77.
[2] 齐欢. 数学模型方法[M]. 武汉：华中理工大学出版社，1996. 180—183.
[3] 李春喜，王文林，陈士林，等. 生物统计学[M]. 北京：科学出版社，1997. 112—114.
[4] 王如松，周启星，胡聃. 城市生态调控方法[M]. 北京：气象出版社，2000. 33—36.

Application of Gompertz increase model to prediction of forestry product value

YU Yong-qing¹, FU Shun-hua²

(1. Department of Information Engineering and Basic Science, Zhejiang Forestry College, Lin'an 311300, Zhejiang, China; 2. Department of Resources and Environment, Zhejiang Forestry College, Lin'an 311300, Zhejiang, China)

Abstract: By the theory and method of increase model, with statistical data in *Fifty Years of Lin'an*, the Gompertz increase model $\hat{y} = 6 \exp[-5.8020 e^{-0.3679t}]$ was established, which predicted the output value of forest products. The model corresponded more to practicality and attained high rigidity. The relative error was 0.0082% between prediction and actual value, correlative index was 0.9992. This predicting measure is simple and easy to use, and has practical significance, it can also be used in predicting the output of cash forests and the volume of forestry resource consumption etc. It offers decision warranty and raises the power of general control for forestry management.

Key words: Gompertz increase model; method of least squares; forest products; prediction