浙 江 林 学 院 学 报　1998，**15**（3）：304～309
Journal of Zhejiang Forestry College

单圈图最小特征值的上界

徐光辉
（浙江林学院基础部，临安 311300）

摘　要　设 G 为 n 阶简单图，$\lambda_n(G)$ 为 G 的最小特征值。本文证明了：若 G 为 n 阶单圈图，G^* 为 C_3 的每个顶点分别与 $P_{k-1}, P_{k_1-1}, P_{k_2-1}$ 的一个一度点相连而得的单圈图，其中 $k\geqslant k_1\geqslant k_2\geqslant 1, k-k_2\leqslant 1, k+k_1+k_2=n$，则 $\lambda_n(G)\leqslant\lambda_n(G^*)$ 等号成立当且仅当 $G\cong G^*$。

关键词　连通图；单圈图；诱导子图；特征值
中图分类号　**O157.5**

设 G 为 n 阶简单图，G 的特征多项式为 $P(G;\lambda)$（以后将简记为 $P(G)$）；其特征值可按大小顺序排列为 $\lambda_1(G)\geqslant\lambda_2(G)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(G)$；称 $\lambda_n(G)$ 为 G 的最小特征值。目前，关于最小特征值的上界，已经有一些较好的结果。文献[1] 证明了：若 G 是连通图，$G\not\cong K_n$，则

$$\lambda_n(G)\leqslant\lambda_n(K_{n-1}^1)$$

等号成立当且仅当 $G\cong K_{n-1}^1$。这里 K_{n-1}^1 是 K_{n-1} 的任一顶点与一孤立点相连而得的图。

现在考虑一类特殊图即单圈图的最小特征值。所谓单圈图就是其边数等于点数的连通图。本文证明了：若 G 为 n 阶单圈图，G^* 为 C_3 的每个顶点分别与 $P_{k-1}, P_{k_1-1}, P_{k_2-1}$ 的一个一度点相连而得的单圈图，其中 $k\geqslant k_1\geqslant k_2\geqslant 1, k-k_2\leqslant 1, k+k_1+k_2=n$，则

$$\lambda_n(G)\leqslant\lambda_n(G^*)$$

等号成立当且仅当 $G\cong G^*$。

1　引理和定理

首先给出一些引理。

引理 1　设 G 为简单图，$v\in V(G)$，$C(v)$ 为包含 v 的所有回路集合，则

$$P(G)=\lambda P(G-v)-\sum_{u\sim v}P(G-v-u)-2\sum_{Z\in C(v)}P[G-V(Z)]。$$

证明　见文献[2]。

收稿日期：1997-12-01
作者简介：徐光辉，男，1965 年生，讲师，硕士

引理 2　对 n 阶简单图 G，设 $V' \subset V(G)$，且 $|V'|=k$，则

$$\lambda_i(G) \geqslant \lambda_i(G-V') \geqslant \lambda_{i+k}(G)\ (1 \leqslant i \leqslant n-k)。$$

证明　见文献[3]。

引理 3　设 G_1，G_2，G_3，G_4 为如图 1 所示的树，则其最小特征值都为 -2。

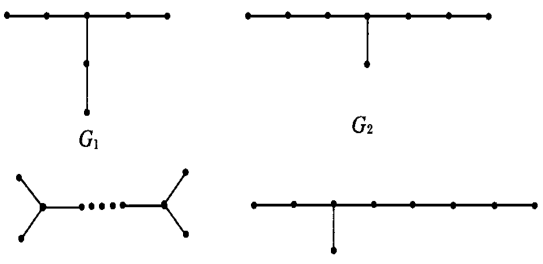

图 1　G_1，G_2，G_3，G_4

Figure 1　G_1, G_2, G_3, G_4

证明　见文献[3]。

引理 4　设 T 为 n 阶树，且 $T \ncong P_n$，T^* 为 P_3 的 2 度点与 P_{n-3} 的一个 1 度点相连而得的树，则

$$\lambda_n(T) \leqslant \lambda_n(T^*)$$

等号成立当且仅当 $T \cong T^*$。

证明　显然 $n \geqslant 4$。由文献[3]可知 $\lambda_n(T^*)=-2\cos\dfrac{\pi}{2n-2}$。下面分几种情形分别考虑：

1° 当 $4 \leqslant n < 9$ 时，由文献[3]知结论成立。

2° 当 $n \geqslant 9$ 时，

(1)若存在一点 $v \in V(T)$，$d(v) \geqslant 4$，则 $\lambda_n(T) \leqslant \lambda_5(K_{1,4})=-2<\lambda_n(T^*)$；

(2)若存在两点 u，$v \in V(T)$，$d(u)=d(v)=3$，则必有形如图 1 中 G_3 的诱导子圈，故

$$\lambda_n(T) \leqslant -2 < \lambda_n(T^*)；$$

(3)若恰有一点 $v \in V(T)$，$d(v)=3$，则若 $T \ncong T^*$，T 必有形如图 1 中 G_1，G_2，G_4 的诱导子图，从而有 $\lambda_n(T) \leqslant -2 < \lambda_n(T^*)$。

故 $n \geqslant 9$ 时结论也成立，从而引理得证。

引理 5　设 T 为 n 阶树，$T \ncong P_n$，则

$$\lambda_n(T) < \lambda_{n+1}(P_{n+1})\ (n>4)。$$

证明　由引理 4 知 $\lambda_n(T) \leqslant \lambda_n(T^*)=-2\cos\dfrac{\pi}{2n-2}$。又 $\lambda_{n+1}(P_{n+1})=-2\cos\dfrac{\pi}{n+2}$，而 $n>4$ 时 $2n-2>n+2$，从而 $\lambda_n(T^*)<\lambda_{n+1}(P_{n+1})$，因而必有

$$\lambda_n(T) < \lambda_{n+1}(P_{n+1})。$$

下面考虑单圈图。首先给出一个定义：

定义　记如图 2 所示的 n 阶单圈图为 $C_3(T_1, T_2, T_3)$，其中 T_i 是以 u_i 为根点的树（$i=$

1, 2, 3)。

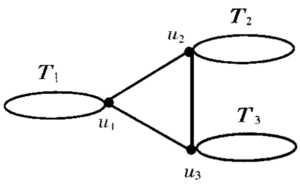

图 2 $C_3(T_1, T_2, T_3)$

Figure 2 $C_3(T_1, T_2, T_3)$

由此可得以下引理:

引理 **6** 设 G^* 为如前所述的 n 阶单圈图, 则

(1)当 $n=3k$ 或 $n=3k-1$ 时,

$$\lambda_n(G^*)=\lambda_{2k}(P_{2k})=-2\cos\frac{\pi}{2k+1};$$

(2)当 $n=3k-2$ 时,

$$\lambda_{2k}(P_{2k})<\lambda_n(G^*)\leqslant\lambda_{2k-1}(P_{2k-1})。$$

证明:

(1)当 $n=3k$ 时, 由于 P_n 的特征多项式为 $U_n(\frac{\lambda}{2})$, 其中 $U_n(x)$ 为第 2 类 Chebyshev 多项式[4], 故由引理 1 有(为方便起见, 以下 $U_n(\frac{\lambda}{2})$ 简记为 U_n):

$$P(G^*)=\lambda U_{k-1}U_{2k}-U_{k-2}U_{2k}-2U_{k-1}^2U_k-2U_{k-1}^3=U_kU_{2k}-2U_{k-1}^2(U_k+U_{k-1}),$$

又

$$U_{2k}=U_k^2-U_{k-1}^2,$$

故

$$P(G^*)=(U_k+U_{k-1})^2(U_k-2U_{k-1})。$$

由于 $\lambda=-2\cos\frac{\pi}{2k+1}$ 是 $U_{2k}(\frac{\lambda}{2})$ 的零点, 但不是 U_k-U_{k-1} 的零点, 故它必是 U_k+U_{k-1} 的零点, 从而是 $P(G^*)$ 的二重特征值。

又由引理 2 可知 $\lambda_{n-2}(G^*)\geqslant\lambda_k(P_k)$, 故必

$$\lambda_{n-1}(G^*)=\lambda_n(G^*)=\lambda_{2k}(P_{2k})=-2\cos\frac{\pi}{2k+1}。$$

而当 $n=3k-1$ 时, 由引理 2 有:

$$\lambda_{n+1}[C_3(P_k, P_k, P_k)]\leqslant\lambda_n(G^*)\leqslant\lambda_{2k}(P_{2k}),$$

且

$$\lambda_{n+1}[C_3(P_k, P_k, P_k)]=-2\cos\frac{\pi}{2k+1}。$$

故也有

$$\lambda_n(G^*)=\lambda_{2k}(P_{2k})=-2\cos\frac{\pi}{2k+1},$$

(2)当 $n=3k-2$ 时, 首先由引理 2 有

$$\lambda_{n+1}[C_3(P_k, P_k, P_{k-1})]\leqslant\lambda_n(G^*)\leqslant\lambda_{2k-1}(P_{2k-1}),$$

故

$$\lambda_{2k}(P_{2k})\leqslant\lambda_n(G^*)\leqslant\lambda_{2k-1}(P_{2k-1})。$$

下证左边等号不可能成立[以下 $C_3(P_{k_1}, P_{k_2}, P_{k_3})$ 将简记为 C_{k_1, k_2, k_3}]。

若 $\lambda_n(G^*)=\lambda_{2k}(P_{2k})$, 此时 $G^*\cong C_{k, k-1, k-1}$, 则由引理 1 有

$$P(C_{k, k, k-1})=\lambda P(C_{k, k-1, k-1})-P[C_{(k, k-1, k-2)}]。$$

故

$$P[C_{k, k-1, k-2}; \lambda_{2k}(P_{2k})]=0。$$

同理

$$P(C_{k, k-1, k-1})=\lambda P(C_{k, k-1, k-2})-P(C_{k, k-1, k-3}),$$

从而 $P[C_{k, k-1, k-3}; \lambda_{2k}(P_{2k})]=0$。最后可得

$$P[C_{k, k-1, 2}; \lambda_{2k}(P_{2k})]=P[C_{k, k-1, 1}; \lambda_{2k}(P_{2k})]=0。$$

而

$$P[C_{k, k-1, 2})=\lambda P(C_{k, k-1, 1})-P(C_{k, k-1, 0})。$$

这里 $C_{k,k-1,0}\cong P_{2k-1}$, 故有

$$P[P_{2k-1};\lambda_{2k}(P_{2k})]=0,$$

这显然是不可能的。因此, 我们有

$$\lambda_{2k}(P_{2k})<\lambda_n(G^*)\leqslant\lambda_{2k-1}(P_{2k-1})。$$

现在我们考虑圈长≥4 的单圈图。我们有：

引理 7　设 G 为圈长≥4 的 n 阶单圈图, 则

(1) $G\cong C_5$ 时, $\lambda_5(G)=\lambda_5(G^*)$;

(2) $G\not\cong C_5$ 时, $\lambda_n(G)<\lambda_n(G^*)$。

证明

(1)因为 $\lambda_5(G)=\lambda_5(C_5)=-2\cos\dfrac{\pi}{5}$, 而 $\lambda_5(G^*)=\lambda_4(P_4)=-2\cos\dfrac{\pi}{5}$, 从而结论成立。

(2) $G\not\cong C_5$ 时, 则分以下几种情形:

① G 是偶圈或含有偶圈, 则

$$\lambda_n(G)\leqslant-2<\lambda_n(G^*);$$

② G 是奇圈或含有奇圈, 此时必 $n\geqslant6$。若 G 中形成圈的点其度数都大于 2, 则 G 必有形如图 1 中 G_3 的诱导子图。从而

$$\lambda_n(G)\leqslant-2<\lambda_n(G^*)。$$

若 G 中形成圈的点中有一点 v, $d(v)=2$, 则易知 $G-v$ 为 $n-1$ 阶树, 故有

$$\lambda_n(G)\leqslant\lambda_{n-1}(G-v)\leqslant\lambda_{n-1}(P_{n-1})=-2\cos\frac{\pi}{n}。$$

而当 $n=3k$ 或 $n=3k-1$ 时, 由 $n\geqslant6$ 知必 $n>2k+1$, 故

$$\lambda_n(G)\leqslant-2\cos\frac{\pi}{n}<-2\cos\frac{\pi}{2k+1}=\lambda_n(G^*);$$

当 $n=3k-2$ 时, 必有 $n\geqslant2k+1$, 故

$$\lambda_n(G)\leqslant-2\cos\frac{\pi}{n}\leqslant-2\cos\frac{\pi}{2k+1}<\lambda_n(G^*)。$$

因此 $G\not\cong C_5$ 时总有 $\lambda_n(G)<\lambda_n(G^*)$。

下面只要讨论含有 C_3 的单圈图。我们有以下的引理:

引理 8　设 $G\cong C_3(T_1,T_2,T_3)$为如前所定义的 n 阶单圈图, 则 $\lambda_n(G)\leqslant\lambda_n(G^*)$, 等号成立当且仅当 $G\cong G^*$。

证明　设 $G\not\cong G^*$, 则

(1)若 T_1, T_2, T_3 中至少有 2 棵树不是路, 或虽然是路但其根点不是一度点, 那么 G 必有形如图 1 中 G_4 的诱导子图, 故

$$\lambda_n(G)\leqslant-2<\lambda_n(G^*)。$$

(2)若 T_1, T_2, T_3 中恰有 1 棵树不是路, 或虽然是路但其根点不是一度点, 则当 $n=3k$ 时, G 必有诱导子图 T, T 为 $2k$ 阶树且 $T\not\cong P_{2k}$, 从而

$$\lambda_n(G)\leqslant\lambda_{2k}(T)<\lambda_{2k}(P_{2k})=\lambda_n(G^*);$$

当 $n=3k-1$ 或 $n=3k-2$ 时, 若 $k=2$, 则由文献[3]可知结论成立。若 $k\geqslant3$, 则 G 必有诱导

子图 T, T 为 $2k-1$ 阶树且 $T\not\cong P_{2k-1}$, 从而由引理 5 可知 $\lambda_n(G)\leqslant\lambda_{2k-1}(T)<\lambda_{2k}(P_{2k})\leqslant\lambda_n(G^*)$。

(3)若 T_1, T_2, T_3 都为路且其根点为一度点或孤立点, 则由 $G\not\cong G^*$ 可知, 当 $n=3k$ 时, G 必有诱导子图 P_{2k+1}, 从而

$$\lambda_n(G)\leqslant\lambda_{2k+1}(P_{2k+1})<\lambda_n(G^*);$$

当 $n=3k-2$ 时, G 必有诱导子图 P_{2k}, 从而

$$\lambda_n(G)\leqslant\lambda_{2k}(P_{2k})<\lambda_n(G^*);$$

当 $n=3k-1$ 时, 若 $G\not\cong C_3(P_{k+1}, P_{k-1}, P_{k-1})$, 则 G 必有诱导子图 P_{2k+1}, 从而也有 $\lambda_n(G)<\lambda_n(G^*)$。若 $G\cong C_3(P_{k+1}, P_{k-1}, P_{k-1})$, 则首先 $\lambda_n(G)\leqslant\lambda_n(G^*)$, 又

$$P(G)=\lambda P(C_{k,k-1,k-1})-P(C_{k-1,k-1,k-1})。$$

而此时 $G^*\cong C_3(P_k, P_{k-1}, P_{k-1})=C_{k,k,k-1}$, 则

$$P(G^*)=\lambda P(C_{k,k-1,k-1})-P(C_{k,k-2,k-1}),$$

故
$$P(G)-P(G^*)=P(C_{k,k-2,k-1})-P(C_{k-1,k-1,k-1})。$$

同理 $P(C_{k,k-2,k-1})-P(C_{k-1,k-1,k-1})=P(C_{k-1,k-3,k-1})-P(C_{k-2,k-2,k-1})$。

继续这个过程可得

$$\begin{aligned}P(G)-P(G^*)=&P(C_{2,0,k-1})-P(C_{1,1,k-1})=\\&U_{k+1}-(\lambda U_k-U_{k-1}-\lambda U_{k-2}-2U_{k-2})=\\&(\lambda+2)U_{k-2},\end{aligned}$$

因此
$$P(G;-2\cos\frac{\pi}{2k+1})\neq 0,$$

从而
$$\lambda_n(G)<-2\cos\frac{\pi}{2k+1}=\lambda_n(G^*)。$$

因此, 当 $G\not\cong G^*$ 时, 我们总有 $\lambda_n(G)<\lambda_n(G^*)$, 从而引理得证。

2 结论

现在, 我们不难得到本文的主要结果。

定理 设 G 为任一 n 阶单圈图, G^* 为如前所定义的 n 阶单圈图, 则

$$\lambda_n(G)\leqslant\lambda_n(G^*)$$

等号成立当且仅当(1) $n=5$ 时, $G\cong G^*$ 或 $G\cong C_5$; (2) $n\neq 5$ 时, $G\cong G^*$。

证明 由引理 7 与引理 8 立得。

参 考 文 献

1 Hong Y. On the least eigenvalue of a graph. *Syst Sci & Math*, 1993, **6**(3): 269～272

2 Schwenk A. Computing the characteristic polynomial of a graph. In: Bary R, Harary F. *Graphs and combinatorics, lecture notes in mathematics* No 406. Berlin: Springer-Verlag, 1974. 247～261

3 Cvetkovic D, Doob M, Sachs H. *Spectra of graphs theory and application*. New York: Academic Press, 1980. 77; 268～291

4 Cvetkovic D, Rowlinson P. Spectra of unicyclic graphs. *Graph & Comb*, 1987, **3**: 7～23

Xu Guanghui (Zhejiang Forestry College, Lin'an 311300, PRC). **Upper bound on the least eigenvalue of unicyclic graphs**. *Journal of Zhejiang Forestry College*. 1998, **15**(3): 304～309

Abstract: Let G be a simple graph with n vertices and $\lambda_n(G)$ be the least eigenvalue of G. If G is a unicyclic graph with n vertices, G^* is the graph obtained by joining each vertex of C_3 to a vertex with degree one of P_{k-1}, P_{k_1-1}, P_{k_2-1}, respectively, where $k \geqslant k_1 \geqslant k_2 \geqslant 1$, $k - k_2 \leqslant 1$, $k + k_1 + k_2 = n$, then $\lambda_n(G) \leqslant \lambda_n(G^*)$ and the equality holds if and only if $G \cong G^*$.

Key words: connected graph; unicyclic graph; induced subtraph; characteristic value