

文章编号: 1000-5692(2001)02-0184-04

方程求实根的四分试位算法

管 宇

(浙江林学院 信息工程与基础科学系, 浙江 临安 311300)

摘要: 给出方程 $f(x) = 0$ 求实根的四分试位算法。不管是否重根, 只要 $f(x)$ 连续有实根且初值合适, 都能较快得到理想的近似根。表 4 参 3

关键词: 真根; 误差; 四分试位算法

中图分类号: O241.5 **文献标识码:** A

关于方程:

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

求实根的数值方法常有二分法、试位法、割线法、Newton 法、Brent 法和抛物线法等^[1,2]。其中二分法和试位法收敛慢, 割线法对初值要求高, Newton 法主要用于求单根且需求导, Brent 法将二分法和割线法相结合但重根时收敛太慢, 抛物线法可求复根而计算量大。魏焕彩^[3]结合割线法与抛物线法构造了一个二阶收敛阶的算法, 但仅限于求单根。本文给出方程 $f(x) = 0$ 求实根的四分试位算法, 不管是否重根及是否可导, 只要 $f(x)$ 连续有实根且初值合适, 都能较快得到理想的近似根。

1 四分试位算法

本算法为求方程 (1) 在区间 $[a, b]$ 内的实根。其中 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(a)f(b) < 0$, 并且方程 (1) 在 $[a, b]$ 内只有 1 个实根, 单元 x 存放真根 x^* 的近似值。当 $|f(x)| < \epsilon$ 或 $|b-a| < \eta$ (其中 ϵ 为残量精度, η 为根的误差限) 或迭代次数 $N=10$ 时, 迭代运算终止并输出数据。

第 1 步: 计算 $f(a)$ 与 $f(b)$, 当 $|f(a) \div f(b)| \geq 3$ 时, 取 $x = b - (b-a) \div 4$, 当 $|f(b) \div f(a)| \geq 3$ 时, 取 $x = a + (b-a) \div 4$; 否则取 $x = b - f(b)(b-a) \div [f(b) - f(a)]$ 。计算 $f(x)$, 若 $|f(x)| < \epsilon$, 则终止运算; 否则比较 $f(x)$ 与 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的符号, 当 $f(x)f(a) < 0$ 时, 取 $a := x$, 否则以 $b := x$ 。若 $|b-a| \geq 0.01$, 重复第 1 步迭代; 若 $|b-a| < 0.01$, 则转入第 2 步。

第 2 步: 当 $|b-a| < 0.01$ 时, 无论 $|f(a) \div f(b)|$ 的值为多少, 都取 $x = b - f(b)(b-a) \div [f(b) - f(a)]$ 进行迭代。

本算法先将区间 $[a, b]$ 四等分: 凡 $|f(a) \div f(b)| \geq 3$ 时, 取靠近 b 的四分点; 凡 $|f(b) \div f(a)| \geq 3$ 时, 取靠近 a 的四分点; 其余情形按试位法公式取点, 故称为四分试位算法。

定理 1 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(a)f(b) < 0$, 则四分试位算法必收敛, 且收敛速度

收稿日期: 2000-04-24; 修回日期: 2000-09-18

作者简介: 管宇(1964-), 男, 浙江台州人, 讲师, 从事应用数学研究。

©1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

线性。

证明 因为当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(a)f(b) < 0$, 单独使用四分算法和试位算法都是收敛的, 所以四分试位算法迭代肯定收敛。另一方面四分试位算法的第 2 步为试位算法, 故四分试位算法收敛速度为线性。

2 举例比较各种算法

以下例子及计算数据均取自文献 [1]。四分试位法的计算在具有十位数字显示的计算器上进行。

例 1 求 $f(x) = x^6 - x - 1 = 0$ 在区间 $[1, 2]$ 上的根。

解 用四分试位法及其他算法的结果见表 1。

表 1 用各种算法计算例 1 结果

Table 1 Extract a root on the equation of the example 1 with various algorithm

算法	初值	迭代次数 N	x_N	$f(x_N)$
二分法	$a = 1.0, b = 2.0$	15	1.134 74	-1.11E-3
试位法	$a = 1.0, b = 2.0$	50	1.126 48	-7.95E-2
割线法	$a = 2.0, b = 1.0$	7	1.134 724 138	-8.00E-9
Newton 法	$x_0 = 2.0$	7	1.134 724 138	-8.00E-9
四分试位法	$a = 1.0, b = 2.0$	7	1.134 724 139	+1.10E-8

例 2 求 $f(x) = (x-1)^3 + (x-1) = 0, f(x) = (x-1)^3 = 0, f(x) = (x-1)\exp[-(x-1)^{-2}] = 0$ 在区间 $[0, 3]$ 上的根。

解 用四分试位法与 Brent 法计算结果见表 2~3。

表 2 求 $f(x) = (x-1)^3 + (x-1) = 0$ 在区间 $[0, 3]$ 上的根

Table 2 On $[0, 3]$ extract a root of the equation $f(x) = (x-1)^3 + (x-1) = 0$

四分试位法				Brent 法		
a	$f(a)$	$f(b)$	b	a	$f(a)$	b
0.0	-2.0	10.0	3.0	0.0	-2.0	3.0
0.75	-0.265 625		3.0	0.5	-0.625	3.0
0.75		0.343 017 578	1.312 5	0.713 903 7	-0.310	3.0
0.995 487 364	-0.004 512 727		1.132 5	0.915 450 6	-8.51 E-2	3.0
0.995 487 364		0.075 158 036	1.074 705 25	0.990 178 8	-9.82 E-3	3.0
0.995 487 364		0.015 304 236	1.015 311 654	0.999 856 6	-1.43 E-4	3.0
0.995 487 364		0.000 440 687	1.000 440 687	0.999 999 8	-1.79 E-7	3.0
0.995 487 364		8.0 E-9	1.000 000 008	0.999 999 8	-1.79 E-7	3.0

说明: 加 “ ” 表示四分试位法第 1 步迭代到此为止, 下同

表 3 用四分试位法求 $f(x) = (x-1)^3 = 0$ 在区间 $[0, 3]$ 上的根

Table 3 On $[0, 3]$ extract a root of the equation $f(x) = (x-1)^3 = 0$ with quartile division and regular-faki-iteration algorithm

a	$f(a)$	$f(b)$	b
0.0	-1.0	8	3.0
0.75	-0.015 625		3.0
0.940 476 192	-2.109 E-4		3.0
0.940 476 192		3.153 4E-5	1.033 482 144
0.940 476 192		1.071 E-6	1.010 230 656
0.992 792 040	-3.74 E-7		1.010 230 656
0.997 305 564	-2.00 E-8		1.010 230 656
0.997 305 564		1.547 E-10	1.000 536 837
0.997 305 564		1.570 E-13	1.000 053 918

说明: 此例为求三重根 $x^* = 1$; 四分试位法仅需迭代 8 次, Brent 法和二分法分别需迭代 23 次和 19 次^[1]

©1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. <http://www.cnki.net>

表4 用四分试位法求 $f(x) = (x-1)\exp[-(x-1)^2] = 0$ 在区间 $[0, 3]$ 上的根Table 4 On $[0, 3]$ extract a root of the equation $f(x) = (x-1)\exp[-(x-1)^2] = 0$ with quartile division and regular-falsi iteration algorithm

a	$f(a)$	$f(b)$	b
0.0	-0.367 894 41	1.557 601 566	3.0
0.75	-2.800 0E-8		3.0
0.75		1.116E-5	1.312 5
0.890 625	-5.438 6 E-38		1.312 5
0.996 093 75	≈ 0		1.312 5

说明: 此例方程的真根 $x^* = 1$ 有无限重数, 用 Brent 法迭代 10 次得 $x = 0.927\ 749\ 8^{[1]}$, Newton 法在此不能用, 而四分试位法仅需迭代 4 次

3 四分试位法特点分析

四分法利用 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的符号与绝对值大小取迭代点: 如果 $|f(a) \div f(b)| \geq 3$, 对于单调连续函数来讲, 真根最有可能在靠近点 b 的四分之一区间 $[0.25a + 0.75b, b]$ 里, 那么下一步迭代区间就缩小为 $b - (0.25a + 0.75b) = |b - a|/4$, 这相当于二分法迭代 2 次。当然真根可能在别的四分之一区间里, 但一般来讲可能性随真根与点 b 距离增加而大幅减少。因此只要事先对 $f(x)$ 的特征与图形略作分析, 就能保证真根所靠近端点的绝对值相对较小, 如此就能发挥四分法的长处。

在真根附近若 $f(x)$ 值变化较大, 四分法优于二分法; 若变化小, 则二分法好于四分法; 试位法更适合于后者。因此将四分法与试位法有机结合, 发挥各自长处又能弥补缺点, 成为一个相当好的算法, 即使求重根时也能较快获得理想结果。

设 $x = b - f(b)(b-a) \div [f(b) - f(a)]$, x^* 是方程 (1) 在 $[a, b]$ 上的真根, 利用中值定理可得^[1]

$$|x^* - x| = |x^* - b + f(b)(b-a) / [f(b) - f(a)]| \\ = |(x^* - a)(x^* - b)f''(\zeta) / 2f'(\xi)| \leq [(b-a)/2]^2 |f''(\zeta) / 2f'(\xi)|. \quad (2)$$

式中: $\zeta, \xi \in [a, b]$, 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内没有二阶导数就用差商表示。当 $|b-a| < 0.01$ 时, $|x-x^*|$ 可达 10^{-4} 数量级。尽管试位法线性收敛, 但当 $|b-a| < 0.01$ 时, 每迭代 1 次, 误差限 $|x-x^*|$ 可减少 10^{-2} 倍。如要求近似计算误差 η 取 10^{-8} , 则一般仅再需迭代 $(8-2) \div 2 = 3$ 次左右。

一般地, 四分试位法第 1 步迭代将区间长度 3.00 变为 0.01, 约需迭代 6 次, 而二分法需迭代 9 次。因此四分试位法求单根迭代次数一般不超过 10 次, 就能保证误差小于 10^{-8} , 这正是算法中限定最大迭代次数 $N=10$ 的原因。当然误差限要求变了, 初始迭代区间不同, 由第 1 步进入第 2 步迭代的区间临界值和 N 值也应作相应调整。如若迭代 N 次后果仍不理想, 就应分析 $f(x)$ 的数值变化或几何图形, 重新确定初值 a 和 b , 使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续单调, 真根靠近绝对值较小的那一端。实际上, 在正式迭代之前就该做好此项工作。

4 四分试位法的变形

如果 $f(x)$ 在真根附近较陡峭, 即 $|f'(x)| \geq 7$, 或者 $|f(a) \div f(b)| \geq 7$ 或 $|f(b) \div f(a)| \geq 7$ 时, 可用八分法代替四分法。当 $|f(a) \div f(b)| \geq 7$ 时, 取 $x = a/8 + 7b/8$; 当 $|f(b) \div f(a)| \geq 7$ 时, 取 $x = 7a/8 + b/8$; 其他情形仍用试位法。

对例 1 用八分试位法计算: $f(1.0) = -1$, $f(2.0) = 61$, $|f(2.0) \div f(1.0)| = 61 \geq 7$, 用八分法迭代 4 次, 迭代区间从 1.0 变为 0.004; 再用试位法迭代 2 次得 $x = 1.134\ 724\ 130$, 误差不超过 10^{-8} , 共需迭代 6 次。

对例 2 中求 $f(x) = (x-1)\exp[-(x-1)^2] = 0$ 在区间 $[0, 3]$ 上的根: 用四分法迭代 1 次得 $x = 0.75$, $f(0.75) = -0.25e^{-16}$, 迭代区间为 $[0.75, 3.0]$; 而 $f(3.0) = 1.557\ 601\ 566$, 二者相差实在太, 取靠近点 0.75 的八分点 $x = 0.75 + (3.0 - 0.75)/8 = 1.031\ 25$, $f(1.031\ 25) =$

$2^{-5}e^{-1024} \approx 0$ ，仅用 2 次迭代就得理想结果。

参考文献：

[1] Atkinson KE. 数值分析引论[M]. 匡蛟勋, 王国荣, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 1986. 31—67.
[2] 易大义, 蒋叔豪, 李有法. 数值方法[M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 1984. 190—200.
[3] 魏焕彩. 一种两点迭代法[J]. 工科数学, 1999, 15 (1): 160—163.

Quartile division and regular-falsi-iteration
algorithm of solving the equation

GUAN Yu

(Department of Information Engineering and Basic Science, Zhejiang Forestry College, Lin'an 311300 Zhejiang China)

Abstract: Quartile division and regular-falsi-iteration algorithm of solving the equation $f(x) = 0$ is given out. Whatever repeated root is, a good approximate real root is quickly got by it if $f(x) = 0$ has a continuous real root and reasonable initial value.

Key words: real root; error; quartile division and regular-falsi-iteration algorithm