浙 江 林 学 院 学 报 2002, **19**(1): 90～94
Journal of Zhejiang Forestry College

文章编号: 1000-5692(2002)01-0090-05

关于序贯抽样检验

管 宇

(浙江林学院 基础部, 浙江 临安 311300)

摘要: 利用 Wald 的序贯概率比检验中接收产品时对应的批检验数: $n_1^*(0, c_{11})$, $n_2^*(1, c_{12})$, …, $n_k^*(k-1, c_{1k})$, …, 设计出一种改进型序贯检验(其中当 $c_{1t} < s$ 时($t = 1, \cdots, s$), 取 $c_{1t^*} = c_{1t}$; 当 $c_{1t} \geqslant s$ 时, 取 $c_{1t^*} = s$): $n_1^*(0, c_{11})$, $n_2^*(1, c_{12^*})$, …, $n_s^*(s-1, s)$。证明了当次品率较小($p \leqslant p_0$)时, 改进型序贯检验的平均抽检个数 $N^*(p)$ 与序贯概率比检验的 $N(p)$ 比较接近, 但抽检周期要小得多。表 1 参 6

关键词: 序贯概率比检验; 序贯抽样; 序贯检验; 平均抽检个数
中图分类号: O212.3　　文献标识码: A

1 序贯概率比检验

在产品的计数抽样检验中, 按抽取样本的方式可分为一次、二次、多次及序贯抽检方案[1,2]。我们总希望在抽检效果基本相同的前提下, 尽量减少被检验的产品个数。一般地, 二次抽检的总平均抽样品个数少于一次抽查, 多次抽检又少于二次抽检, 序贯抽检最少。A Wald 提出了序贯概率比检验[3～5]。

设某批产品(总体)的次品率为 p, 对总体提出假设:

$$H_0: p \leqslant p_0; H_1: p \geqslant p_1。 \tag{1}$$

式中 $0 < p_0 < p_1 < 1$。每次从该批产品中抽取一个检验, 设 d_k 表示前 k 个被抽检的样品中次品的个数, 得第 k 次的似然比(为计算方便, 全文均作重复抽样假设):

$$R_k = \frac{P_{1k}}{P_{0k}} = \frac{p_1^{d_k}(1-p_1)^{k-d_k}}{p_0^{d_k}(1-p_0)^{k-d_k}}, k = 1, 2, \cdots。$$

若 $R_k \leqslant A$, 判定为合格批; 若 $R_k \geqslant B$, 判定为不合格批; 若 $A < R_k < B$, 不能作出判断, 继续抽检下一个样品。其中常数 $A = \frac{\beta}{1-\alpha}$, $B = \frac{1-\beta}{\alpha}$。$\alpha$ 是 H_0 为真而被判定为不合格批(弃真错误)的概率, β 是 H_1 为真而被判定为合格批(纳伪错误)的概率。Wald 证明了[4,5]: 在一切其犯 2 类错误的概率分别不超过 α 和 β 的检验类中, 以序贯概率比检验的平均抽样品个数最少; 序贯概率比检验能在有限次抽检后作出接收或拒收判断。但每次仅抽样品 1 个, 整个抽检周期较大。

例 1　$p_0 = 0.01$, $p_1 = 0.05$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.1$ 的序贯概率比检验。

合格判断线[3] $c_{0n} = -h_0 + u \times n$, 不合格判断线 $c_{1n} = h_1 + u \times n$, 其中

收稿日期: 2001-03-01; 修回日期: 2001-09-27
作者简介: 管宇(1964-), 男, 浙江台州人, 讲师, 从事概率统计理论及应用研究。

$$h_0=\frac{\log\dfrac{1-\alpha}{\beta}}{\log\dfrac{p_1}{p_0}+\log\dfrac{1-p_0}{1-p_1}},\ h_1=\frac{\log\dfrac{1-\beta}{\alpha}}{\log\dfrac{p_1}{p_0}+\log\dfrac{1-p_0}{1-p_1}},\ u=\frac{\log\dfrac{1-p_0}{1-p_1}}{\log\dfrac{p_1}{p_0}+\log\dfrac{1-p_0}{1-p_1}}。$$

代入得：$c_{0n}=-1.3638565+0.0249854\times n$，$c_{1n}=1.751017+0.0249854\times n$。

观察例 1 可得出序贯概率比检验有如下特点：①如若最后接收某批产品，则总的抽样品个数必为（以例 1 为例），55（即需连续抽检 55 个产品全合格），95，135，175，215，…中的某一个，而不会是 1～54，56～94，96～134，136～174～176～214，216～254，…中的任何一个数；②如若最后拒收某批产品，则除了（以例 1 为例）1，10，50，91，131…外其他任何自然数都有可能为总的抽样品个数。

表 1　序贯概率比检验表

Table 1　Sequential probability ratio test

抽样数 n	接收数 c_{0n}	抽样数 n	拒收数 c_{1n}
1～54	*	1	*
55～94	0	2～9	2
95～134	1	10～49	3
135～174	2	50～90	4
175～214	3	91～130	5
215～254	4	131～170	6
…	…	…	…

说明：*表示不能作出接收或拒收的决定

2　新型序贯概率比检验

设 s 表总抽检次数，记 m_k 为第 k 次（$k=1,2,\cdots,s$）抽检的产品数，d_k 表示前 k 次抽检的样品中总的次品个数，c_{0k}，c_{1k} 表示第 k 次抽检时接收数和拒收数，事件 A_k 分别表示第 k 次抽检后作出接收该批产品。至多 k 次抽检而被接收的概率：

$$L_k(p)=P(A_1)+P(A_2-A_1)+\cdots+P(A_k-A_{k-1})=\sum_{t=1}^{k}\sum_{d=c_{0(t-1)}+1}^{c_{0t}}a_dp^d(1-p)^{n_t-d}。$$

且
$$L_s(p_0)=P_0(A_1)+P_0(A_2-A_1)+\cdots+P_0(A_s-A_{s-1})\approx1-\alpha,$$
$$L_s(p_1)=P_1(A_1)+P_1(A_2-A_1)+\cdots+P_1(A_s-A_{s-1})\approx\beta。$$

其中 $n_t=m_1+\cdots+m_t(t=1,2\cdots s)$；系数 a_d 与次品率 p 无关。

当 $s=1,2$ 时，此法就是一次、二次抽检，当 $s\geqslant3$ 时，就是多次抽检和序贯检验。如果接收数 $c_{0t}=t-1$，则 $\dfrac{P_1(A_t-A_{t-1})}{P_0(A_t-A_{t-1})}=\dfrac{p_1^{t-1}(1-p_1)^{n_t-t+1}}{p_0^{t-1}(1-p_0)^{n_t-t+1}}$（其中 A_0 为不可能事件，$t=1,2,\cdots,s$）可看作为似然比，因此我们可以这样理解序贯概率比检验：它正是将每对接收概率之比的上下临界值取定为常数 $\beta/(1-\alpha)$ 和 $(1-\beta)/\alpha$，从而确保 2 类错误。

记 n_k^* 为序贯概率比检验中，当总的累计次品数为 $k-1$ 时，首次作为接收该批产品时已抽检过的产品总数。由例 1 可看出 n_k^* 是唯一的；$n_k^*=55$，$n_2^*=95$，$n_3^*=135$，$n_4^*=175$，$n_5^*=215$，$n_6^*=255$，…。

现以上述 n_1^*，n_2^*，n_3^*，n_4^*，n_5^*，…，设计一种新型序贯检验：

第 1 次抽检 n_1^* 个产品，第 2 次抽检（$n_2^*-n_1^*$）个产品，…，第 k 次抽检（$n_k^*-n_{k-1}^*$）个产品，第 k 次抽检时的接收数 $c_{0k}=k-1$，拒收数 c_{1k} 取相应的序贯概率比检验中 n_k^* 所对应的拒收数（$k=1,2,\cdots$），如例 1：$c_{11}=4$，$c_{12}=5$，…。

定理 1　新型序贯检验以概率 1 在经过有限次检验后停止。

证明　设 s 为中止检验的批次，则：

$$P\{s>k\}\leqslant P\{A<R_t<B,t=1,\cdots,k\}。$$

由于序贯概率比检验的合格判断线 $c_0=-h_0+u\times n$，不合格判断线 $c_1=h_1+u\times n$ 为线性函数，故（$n_2^*-n_1^*$），…，（$n_k^*-n_{k-1}^*$）取 $[1/u]$ 或 $1+[1/u]$。第 t 批的（$n_t^*-n_{t-1}^*$）个产品抽样检验，可当作（$n_t^*-n_{t-1}^*$）次的独立重复试验，其概率为 $P(A_t-A_{t-1})$。第 t 批拒收数与接收数之差：$c_{1t}-c_{0t}=h_1-h_0=\dfrac{\log AB}{\log\dfrac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}}=\dfrac{\log\dfrac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha\beta}}{\log\dfrac{p_1}{p_0}+\log\dfrac{1-p_0}{1-p_1}}$ 与 t 及 n_t^* 无关。一般 $p_1/p_0\geqslant1.86$[6]，p_1 与 p_0 越接近所

需抽检样品越多,两者太接近,已不适于抽样检验。又设 $p_0 < p_1 \leqslant 0.4$, p_0 与 p_1 太大没有实际意义,则:$p_1 - p_0 \leqslant 0.4$, $1 - p_1 \geqslant 0.6$。且有:

$$\frac{1}{u} = \frac{\log \frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}}{\log \frac{1-p_0}{1-p_1}} = \frac{\log \frac{p_1}{p_0}}{\log \frac{1-p_0}{1-p_1}} + 1 = \frac{\log \frac{p_1}{p_0}}{\log\left(1 + \frac{p_1 - p_0}{1-p_1}\right)} + 1 \geqslant \frac{\log 1.86}{\log\left(1 + \frac{0.4}{0.6}\right)} + 1 \geqslant 2.2。$$

设第 t 批抽检后没有作出接收或拒收判断,接收数 $c_{0t} = t - 1$,拒收数 $c_{1t} = c_{0t} + [h_1 - h_0]$ 或 $c_{0t} + [h_1 - h_0] \pm 1$,此时累计次品总数 d_t 满足:$t - 1 < d_t < c_{1t}$。

取数 $r = [h_1 - h_0] + 2$,如果第 $t+1$ 批至第 $t+r$ 批抽检的 r 批产品全都为次品,且都没有作出接收或拒收判断,此时累计次品总数 $d_{t+r} \geqslant d_t + 2.2r$。第 $t+r$ 批的接收数 $c_{0(t+r)} = (t+r) - 1$,拒收数 $c_{1(t+r)} = c_{0(t+r)} + [h_1 - h_0]$ 或 $c_{0(t+r)} + [h_1 - h_0] \pm 1$,即 $c_{1(t+r)} \leqslant (t+r) - 1 + [h_1 - h_0] + 1 \leqslant 2r + t - 2 < 2r + d_t < d_{t+r}$,这与 $d_{t+r} \leqslant c_{1(t+r)}$ 矛盾。因此,必存在正整数 r,在任何相邻的 r 批抽检中,至少有一批样品不全为次品(否则因作出拒收判断而中止检验);在任何相邻的 $m \times r$ 批抽检中,至少有 m 批样品不全为次品。每一批抽检又可看作相互独立的 $[1/u]$ 或 $[1/u] + 1$ 次的重复抽样,故一定存在正数 $\delta < 1$,使得这 m 批都不全为次品的概率都不超过 δ。从而有:$P\{s > mr\} \leqslant \delta^m$,所以 $P\{s < +\infty = 1 - P\{s = +\infty\} = 1$。

定理 2 新型序贯检验能够保证两类错误。

证明 使用序贯概率比检验而被接收,必然是刚好抽检 n_1^* 或 n_2^*, …, 或 n_k^* 个产品后被接收,此时其中的累计次品数不多不少刚好为 $k - 1$。设产品的次品率为 p,当累计次品数为 $k - 1$ 而被接收时,序贯概庇比检验与新型贯检验的接收概率分别记作 $L_k^*(p)$ 和 $L_k(p)$。则:

$$L_k^*(p) = \sum_{t=1}^{k} a_t p^{t-1}(1-p)^{n_t^* - t + 1}, \quad L_k(p) = \sum_{t=1}^{k} b_t p^{t-1}(1-p)^{n_t^* - t + 1}。$$

其中 a_t, b_t 分别表示抽检 n_{t-1}^* 个产品后不能作出接收或拒收判断,但总共抽检 n_t^* 个产品后作出接收判断时,对应的序贯概率比检验和新型序贯检验的各种情形的数目。由于序贯概率比检验每次抽检 1 个产品,在抽到 n_k^* 之前,可能因累计次品数足够多作出拒收决定而结束抽检。所以 $a_t \leqslant b_t$, $(t = 0, 1, \cdots, k-1)$,故 $L_k^*(p) \leqslant L_k(p)$。但一般情况下,$L_k^*(p)$ 与 $L_k(p)$ 相差不大。又因为序贯概率比检验能够保证两类错误,即存在正整数 w,使 $L_w^*(p_0) \approx 1 - \alpha$,所以对于新型序贯检验,也必存在正整数 $v (\leqslant w)$,使 $L_v(p_0) \approx 1 - \alpha$。另外,因为 $\frac{p_1^{t-1}(1-p_1)^{n_t^*} - t + 1}{p_1^{t-1}(1-p_0)^{n_t^*} - t + 1} \approx \frac{\beta}{1-\alpha}$,所以 $L_v(p_1)/L_v(p_0) \approx \frac{\beta}{1-\alpha}$,就有 $L_v(p_1) \approx \beta$。

3 改进型序贯检验

例 2 给出 $p_0 = 0.01$, $p_1 = 0.05$, $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.1$ 的新型序贯概率比检验。

由例 1 得新型序贯检验数:55 (0, 4), 40 (1, 5), 40 (2, 6), 40 (3, 7), 40 (4, 8), …。可计算前 k 批抽检中被接收的概率 $L_k(p)$:

$$L_1(0.01) = 0.575\,354\,8,\ L_2(0.01) = 0.789\,185\,9,\ L_3(0.01) = 0.885\,995\,5,$$
$$L_4(0.01) = 0.935\,068\,1,\ L_5(0.01) = 0.961\,223\,8 > 1 - \alpha;$$
$$L_1(0.05) = 0.059\,533\,9,\ L_2(0.05) = 0.081\,687\,4,\ L_3(0.05) = 0.091\,724\,7,$$
$$L_4(0.05) = 0.096\,817\,5,\ L_5(0.05) = 0.099\,535 < \beta。$$

所以最终为 5 次抽检方案:

55 (0, 4), 40 (1, 5), 40 (2, 5), 40 (3, 5), 40 (4, 5)。

其中原来序贯概率比检验的拒收数:4, 5, 6, 7, 8, 凡大于 5 的全改为 5, 是因为最后第 5 批抽检的接收数为 4 的缘故, 目的是能最终以概率 1 中止抽检。由定理 2 知这样不影响接收概率。

由例 2 可得出一种较优的改进型序贯抽检方案。

（1）对于所给 p_0, p_1, α, β，先求出序贯概率比检验。

（2）求出新型序贯概率比检验的批检验数：

$$n_1^*(0, c_{11}), n_2^*-n_1^*(1, c_{12}), \cdots, n_k^*-n_{k-1}^*(k-1, c_{1k}), \cdots。$$

（3）分别计算 $p=p_0$ 和 $p=p_1$ 时，不超过 t 批次（$t=1, 2, \cdots$）抽检的接收概率 $L_t(p_0), L_t(p_1)$，直至某 $L_s(p_0)\geqslant 1-\alpha$，而 $L_s-1(p_0)<1-\alpha$ 为止。

（4）最终抽检方案：

$$n_1^*(0, c_{11}), n_2^*-n_1^*(1, c_{12}^*), \cdots, n_s^*-n_{s-1}^*(s, s+1)。$$

其中：当 $c_{1t}<s$ 时，取 $c_{1t}^*=c_{1t}$；当 $c_{1t}\geqslant s$ 时，取 $c_{1t}^*=s(t=1, \cdots, s)$。

当次品率为 p 时，记 $D_t(p)$ 为不超过 $t(t=1, \cdots, s)$ 次抽检作出拒收的概率，则改进型序贯抽检的平均抽样个数：

$N(p)=n_1^*+\{1-L_1(p)-D_1(p)\}(n_2^*-n_1^*)+\cdots+\{1-L_s-1(p)-D_s-1(p)\}(n_s^*-n_{s-1}^*)\approx n_1^*+\{s-1-[L_1(p)+\cdots+L_{s-1}(p)]-[D_1(p)+\cdots+D_s-1(p)]\}(n_2^*-n_1^*)\approx n_1^*+\{s-1-L(p, s-1)-D(p, s-1)\}(n_2^*-n_1^*)$。

其中：$L(p, s)=L_1(p)+\cdots+L_s(p), D(p, s)=D_1(p)+\cdots+D_s(p)$；$L_s(p)+D_s(p)=1$。$(n_2^*-n_1^*), \cdots, (n_s^*-n_{s-1}^*)$ 彼此之间至多相差 1，在例 2 中它们完全相等。一般地，$N(p)$ 与 $n_1^*+\{s-1-L(p, s-1)-D(p, s-1)\}(n_2^*-n_1^*)$ 至多相差 1。

设共 s 批次抽检时总的抽检的产品个数 n_s^*，对应的序贯概率比检验的各次接收概率和拒收概率的累计总和分别表示为 $L^*(p, s), D^*(p, s)$；记 $N(p), N^*(p)$ 分别次品率为 p 时改进型序贯检验和序贯概率比检验的平均抽检产品个数，则有定理 3。

定理 3　$N(p)-N^*(p)\leqslant\{L^*(p, s-1)-L(p, s-1)\}(n_2^*-n_1^*)+\{1-L_s^*(p)\}n_s^*$

特别当次品率较小（$p\leqslant p_0$）时，$N^*(p)$ 与 $N(p)$ 相差不会很大。

证明　$N(p)\approx n_1^*+\{s-1-L(p, s-1)-D(p, s-1)\}(n_2^*-n_1^*)<n_1^*+\{s-1-L(p, s-1)\}(n_2^*-n_1^*)$，$N^*(p)>n_1^*L_1^*(p)+\{L_2^*(p)-L_1^*(p)\}n_2^*+\cdots+\{L_s^*(p)-L_s-1^*(p)\}n_s^*=L_s^*(p)n_s^*-L_1^*(p)(n_2^*-n_1^*)-\cdots-L_{s-1}^*(p)(n_s^*-n_{s-1}^*)=\{L_s^*(p)-1\}n_s^*+n_s^*-L_1^*(p)(n_2^*-n_1^*)-\cdots-L_{s-1}^*(p)(n_s^*-n_{s-1}^*)=n_1^*+\{1-L_1^*(p)\}(n_2^*-n_1^*)+\cdots+\{1-L_{s-1}^*(p)\}(n_s^*-n_{s-1}^*)+\{L_s^*(p)-1\}n_s^*\approx n_1^*+\{s-1-L^*(p, s-1)\}(n_2^*-n_1^*)+\{L_s^*(p)-1\}n_s^*$。

$\therefore N(p)-N^*(p)\leqslant\{L^*(p, s-1)-L(p, s-1)\}(n_2^*-n_1^*)+\{1-L_s^*(p)\}n_s^*$。

当次品率较小（$p\leqslant p_0$）时，$L_1^*(p)=L_1(p)$，而 $L_t^*(p)$ 与 $L_t(p)(t=2, \cdots, s)$ 相差都不大。又第 1 类错误 α 一般较小，$1-L_s^*(p)\approx 1-(1-\alpha)=\alpha$ 也较小。因此 $N^*(p)$ 与 $N(p)$ 相差不会很大。

对于例 2 中的平均抽样个数：$N(0.01)=55+\{4-3.1856-0.0537\}\times 40\approx 85$，$N(0.05)=55+\{4-0.3298-2.2829\}\times 40\approx 110$。序贯概率比检验平均抽样个数近似公式[4~5]：$N^*(P_0)\approx\dfrac{\alpha\log\dfrac{1-\beta}{\alpha}+(1-\alpha)\log\dfrac{\beta}{1-\alpha}}{p_0\log\dfrac{p_1}{p_0}+(1-p_0)\log\dfrac{1-p_1}{1-p_0}}$，$N^*(p_1)\approx\dfrac{(1-\beta)\log\dfrac{1-\beta}{\alpha}+\beta\log\dfrac{\beta}{1-\alpha}}{p_1\log\dfrac{p_1}{p_0}+(1-p_1)\log\dfrac{1-p_1}{1-p_0}}$。计算得：$N^*(0.01)\approx 81$，$N^*(0.05)\approx 103$。由此可见，改进型序贯检验的平均抽样个数与序贯概率比检验相近，而抽检批次明显要少得多，即抽检周期要小得多。当产品的次品率较小（$p\leqslant p_0$）时，改进型序贯检验与序贯概率比检验的平均抽样个数比一次抽样明显要少得多。

参考文献：

[1]　中国大百科全书总编辑委员会《数学》编辑部．中国大百科全书·数学[M]．北京：中国大百科全书出版社，1988．86—87．

[2] 周富臣. 计数抽样检验及其应用[J]. 实用测试技术, 2000, **26**(2): 32－36.
[3] 张小蒂, 李晓钟. 应用统计学导论[M]. 浙江: 浙江大学出版社, 1998. 429－433.
[4] 陈希孺. 数理统计引论[M]. 北京: 科学出版社, 1981. 338－357.
[5] 复旦大学. 概率论(第2册)[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979. 296－321.
[6] 吴乙申. 应用统计学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1986. 234.

On sequential sample test

GUAN Yu
(Department of Basic Science, Zhejiang Forestry College, Lin'an 311300, Zhejiang, China)

Abstract: Using sequential probability ratio test $n_1^*(0, c_{11})$, $n_2^*(1, c_{12})$, $\cdots$, $n_k^*(k-1, c_{1k})$, $\cdots$, design an ameliorate sequential test (if $c_{1t} < s$, assume $c_{1t} = c_{1t}$; if $c_{1t} \geqslant s$, assume $c_{1t}{}^* = s$): $n_1^*(0, c_{11}{}^*)$, $n_2^*(1, c_{12}{}^*)$, $\cdots$, $n_s^*(s-1, s)$. If $p \leqslant p_0$, average sample number of ameliorate sepuential test and sequential probability ratio test is proved little deference, but the test time is less.

Key words: sequential probability ratio test; sequential sampling; sequential test; average sample number