

文章编号: 1000-5692(2002)02-0178-04

# 灰色残差 GM (1, 1) 模型在大气二氧化硫预测中的应用

蒋文伟<sup>1</sup>, 管 宇<sup>2</sup>, 王祖良<sup>3</sup>, 潘军辉<sup>4</sup>

(1. 浙江林学院 生命科学学院, 浙江 临安 311300; 2. 浙江林学院 基础部, 浙江 临安 311300; 3. 浙江省天目山国家级自然保护区管理局, 浙江 临安 311311; 4. 浙江省临安市环境监测站, 浙江 临安 311300)

**摘要:** 应用灰色 GM (1, 1) 模型理论与方法, 建立了临安市大气二氧化硫质量浓度的灰色残差预测方程  $x(t+1) = -0.107432 e^{-0.095872t} + 0.123917$ , 并进行了预测。预测结果与实测值的相对误差绝对值介于 0.56% ~ 14.51% 之间, 预测结果后验比与小误差概率分别为 0.2802 和 1.0。表明模型与实测值拟合程度好, 达到了较高精度。表 3 参 10

**关键词:** 灰色残差 GM (1, 1) 模型; 预测结果后验比; 环境污染; 二氧化硫

**中图分类号:** X511      **文献标识码:** A

灰色模型简称 GM 模型, 是以灰色模块为基础, 以微分拟合法而建成的模型<sup>[1]</sup>。灰色 GM (1, 1) 预测模型已广泛应用于生物、生态和环保等领域, 该模型充分应用数学的语言和工具, 对部分现实的信息加以归纳, 找出因素本身或因素之间的数学关系, 从而了解系统的动态行为和发展趋势<sup>[2]</sup>。区域生态环境问题中, 酸沉降对森林生态系统危害极为严重<sup>[3,4]</sup>, 现以 GM (1, 1) 模型对浙江省临安市大气中二氧化硫质量浓度进行预测, 为改善和定量估算本地区生态环境质量, 促进生态经济的可持续发展提供科学依据。

## 1 建模机理

灰色系统着重研究概率统计和模糊数学所不能解决的“小样本贫信息不确定”问题, 并依据信息覆盖, 通过序列生成寻求现实规律, 其特点是“少数据建模”。与模糊数学不同的是, 灰色系统理论着重研究“外延明确, 内涵不明确”的对象<sup>[5]</sup>, 并遵循 2 条基本原理, 一是信息不完全原理, 二是过程唯一原理<sup>[3]</sup>。灰色模型按照 5 步建模思想构建, 通过灰色生成或序列算子的作用弱化随机性, 挖掘潜在的规律, 经过灰色差分方程之间的互换实现了利用离散的数学序列建立连续的动态微分方程。灰色预测是基于 GM 模型作出的定量预测。一般 GM 模型是以时间数列  $X^{(m)}$  在时间数据平面上的连续曲线或逼近曲线与时间轴所围成的区域模块为基础, 以微分拟合法而建成的模型<sup>[6]</sup>。在 GM (n, h) 模型中, 当  $h \geq 3$  时, 所建 GM 模型不能作预测用, 只能用于分析因子间的相互关系。作预测用的 GM 模型一般为 GM (n, 1) 模型, 其中最重的同时也是在实际中应用最多的是 GM (1, 1) 模型<sup>[1]</sup>。概括地说, GM 模型具有以下特点: ①建模所需的信息较少, 通常只要有 4 个以上数据即可建模; ②不必知道原始数据分布的先验特征, 对无规或服从任何分布的任意光滑离散的原始序列, 通过有限次

的生成即可转化成有规序列; ③建模的精度较高, 可保护原系统的特征, 能较好地反映系统的实际情况。

## 2 材料与方法

### 2.1 材料来源

原始数据来源于浙江省临安市环境监测大气质量10 a 数据汇总平均值。

### 2.2 GM(1, 1)模型的建立

2.2.1 GM(1, n)数学方法概述<sup>[7]</sup> 设一阶n个变量的微分方程:

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt} + ax_1^{(1)} = \sum_{i=1}^{n-1} b_i x_{i+1}^{(1)}.$$

记系数向量  $\hat{a} = [a, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}]^T$ ,  $U = \sum_{i=1}^{n-1} b_i X$  用最小二乘法对  $\hat{a}$  求解:

$$\hat{a} = [X(A, B)^T X(A, B)]^{-1} X(A, B)^T Y_n.$$

其中:  $X(A, B) = [ (A : B) ]$  为分块矩阵,  $A$  为累差行成矩阵;  $B$  为累加生成矩阵。

$$A = \begin{Bmatrix} -a^{(n-1)}(x_1^{(1)}, 2) & -a^{(n-2)}(x_1^{(1)}, 2) & \cdots & -a^{(1)}(x_1^{(1)}, 2) \\ -a^{(n-1)}(x_1^{(1)}, 3) & -a^{(n-2)}(x_1^{(1)}, 3) & \cdots & -a^{(1)}(x_1^{(1)}, 3) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a^{(n-1)}(x_1^{(1)}, n) & -a^{(n-2)}(x_1^{(1)}, n) & \cdots & -a^{(1)}(x_1^{(1)}, n) \end{Bmatrix},$$

$$B = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^2 x^{(0)}(i) + x^{(0)}(1) \right) & 1 \\ -\frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^3 x^{(0)}(i) + \sum_{i=1}^2 x^{(0)}(i) \right) & 1 \\ \Lambda & \Lambda \\ -\frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n x^{(0)}(i) + \sum_{i=1}^{n-1} x^{(0)}(i) \right) & 1 \end{Bmatrix},$$

对于GM(1, 1)模型,  $n=1$ , 则  $A=0$ ; 只有  $B$  矩阵。  $Y_n = [a^{(1)}(x^{(1)}, 2) \ a^{(1)}(x^{(1)}, 3) \ \Lambda \ a^{(1)}(x^{(1)}, n)]^T$ , 解出向量  $\hat{a} = [a, u]^T$  后, 代入微分方程得解:

$$x^{(1)}(t) = (x^{(1)})(0) - (u/a) e^{-at} + u/a^*.$$

令  $x^{(1)}(0) = x^{(0)}(1)$ ; 则 GM(1, 1)模型的时间函数为:

$$\dot{x}^{(1)}(t+1) = [x^{(0)}(1) - u/a] e^{-at} + u/a.$$

### 2.2.2 计算步骤<sup>[8]</sup>

(1) 数据处理, 给出下列原始数据序列  $\{x^{(1)}(i)\}$ , ( $i=1, 2, \Lambda, n$ )。有相应的1次累加生成序列  $\{x^{(1)}(i)\}$ , ( $i=1, 2, \Lambda, n$ ),  $x^{(1)}(i) = \sum_{k=1}^i x^{(0)}(k)$ 。累加生成数列的1次累差  $[a^{(1)}(x^{(1)}, i)]$ , ( $i=1, 2, \Lambda, n$ )。  $a^{(1)}(x^{(1)}, i) = X^{(1)}(i) - X^{(1)}(i-1) = \sum_{k=1}^i x^{(0)}(k) - \sum_{k=1}^{i-1} x^{(0)}(k) = x^{(0)}(i)$ 。

(2) 构造矩阵  $X(B)$

$$B = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \left( (x^{(1)}(2) + x^{(1)}(1)) \right) & 1 \\ -\frac{1}{2} \left( (x^{(1)}(3) + x^{(1)}(2)) \right) & 1 \\ \Lambda & \Lambda \\ -\frac{1}{2} \left( (x^{(1)}(n) + x^{(1)}(n-1)) \right) & 1 \end{Bmatrix}.$$

向量  $Y_n = [x_{(2)}^{(0)}, x_{(3)}^{(0)}, \Lambda, x_{(n)}^{(0)}]^T$ 。

(3) 求  $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = u$  的系数向量  $\hat{a}$ :  $\hat{a} = \begin{bmatrix} a \\ u \end{bmatrix} = [X(B)^T X(B)]^{-1} X(B)^T Y_n$ 。

- (4) 求微分方程的时间函数:  $x^{(1)}(t+1) = [x^{(0)}(1) - u/a] e^{-at} + u/a$ 。
- (5) 用模型求生成数的回代计算值  $\hat{x}^{(1)}_i: \{x^{(1)}_i(i)\}, (i=1, 2, \dots, n)$ 。
- (6) 求原始数据还原值  $\hat{x}^{(0)}_i(i): \hat{x}^{(0)}_i(i) = x^{(1)}_i(i) - \hat{x}^{(1)}_i(i-1), (i=1, 2, \dots, n)$ 。
- (7) 求残差值  $\epsilon^{(0)}$  及相对误差  $q: \epsilon^{(0)}_i(i) = x^{(0)}_i(i) - \hat{x}^{(0)}_i(i), q = \epsilon^{(0)}_i(i) / x^{(0)}_i(i) \times 100\%$ 。
- (8) 计算模型还原数据列  $\{\hat{x}^{(0)}_i(i)\}$  与原始数列  $\{x^{(0)}_i(i)\}$  的关联度  $S$ 。

2.2.3 进行后验差检验<sup>[8]</sup> 求原始数据列的均值:  $\bar{x}^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X^{(0)}(k)$ 。求原始数列的方差与均方差:

$$S_1^2 = \sum_{k=1}^m [x^{(0)}_k(k) - \bar{x}^{(0)}]^2; \quad \bar{S}_1 = \sqrt{\frac{S_1^2}{n-1}}。求残差 \epsilon^{(0)}_k 的均值: \bar{\epsilon}^{(0)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \epsilon^{(0)}_k(k)。求残差的方差与均$$

方差:  $S_2^2 = \sum_{k=1}^n [\epsilon^{(0)}_k(k) - \bar{\epsilon}^{(0)}]^2, \quad \bar{S}_2 = \sqrt{\frac{S_2^2}{n-1}}$ 。预测结果后验化:  $C = S_2/S_1$ 。小误差概率:  $P = \{|\epsilon^{(0)}_k(k) - \bar{\epsilon}^{(0)}| < 0.6745 S_1\}$ 。根据经验, 一般可按表 1 划精度等级。

如果  $q, P, C$  都在允许范围之内, 则可计算预测值。如果不在此范围内, 则需进行残差修正。

2.2.4 残差 GM (1, 1) 建模<sup>[9]</sup> 求原始序列和模型计算值之间的残差:  $\epsilon^{(0)}_i(i) = x^{(0)}_i(i) - \hat{x}^{(0)}_i(i)$ 。同上可求得:  $\hat{\epsilon}^{(0)}_i(i)$ 。修正后得:  $\hat{x}^{(1)}_i(i) = \hat{x}^{(0)}_i(i) + \hat{\epsilon}^{(0)}_i(i)$ 。

检验精度是否达到要求, 如未达到, 可重复进行残差建模, 直到达到要求。此时原始序列计算值为:

$$\hat{x}^{(0)}_i(i) + \sum_{i=1}^r \epsilon^{(0)}_i(i)$$

### 3 结果与分析

根据临安市环境监测结果, 将大气中二氧化硫质量浓度原始数据按年份顺序整理成表 2。通过灰色 GM (1, 1) 模型的分析方法, 对其未来进行预测, 经执行 GM (1, 1) 模型<sup>[10]</sup> 分析功能, 初步结果显示, 后验差检验精度尚未达到要求, 必须进行 2 次灰色残差建模分析。当第 2 次灰色残差序列分析时, 后验差检验  $C < 0.35, P > 0.95$ , 因此, 可认为此灰色残差模型是可靠的, 可用于灰色预测分析。模型参数值及其计算结果为:  $a = 0.095872, b = 0.011880, x(t+1) = -0.107432 e^{-0.095872 t} + 0.123917$ 。从对 1992 年至 1999 年临安市大气中二氧化硫质量浓度回测验证, 实测和预测值相对差绝对值, 介于  $0.56\% \sim 14.51\%$  之间, 实测和预测值的吻合程度较高。从表 3 分析可以看出, 2000 年至 2003 年临安市大气中二氧化硫质量浓度分别为  $0.06637 \text{ mg} \cdot \text{m}^{-3}, 0.06898 \text{ mg} \cdot \text{m}^{-3}, 0.07358 \text{ mg} \cdot \text{m}^{-3}$  和  $0.08056 \text{ mg} \cdot \text{m}^{-3}$ , 其预测结果后验比  $C$  和小误差概率  $P$  分别为 0.2802 和 1.0。

### 4 小结

应用灰色残差 GM (1, 1) 模型对临安市大气中二氧化硫质量浓度进行预测, 预测结果后验比和小误差

表 1 GM (1, 1) 模型的预测精度等级

Table 1 Prediction precision rank

预测精度	$P$	$C$	计算机打印符号
好	$> 0.95$	$< 0.35$	GOOD
合格	$> 0.80$	$< 0.50$	QUALIFIED
勉强	$> 0.70$	$< 0.65$	IUST
不合格	$\leq 0.70$	$\geq 0.65$	BELOW THE MARK

表 2 临安大气二氧化硫质量浓度实测值

Table 2 Sulfur dioxide content of atmosphere in Lin'an

年份	二氧化硫质量浓度/ $(\text{mg} \cdot \text{m}^{-3})$	年份	二氧化硫质量浓度/ $(\text{mg} \cdot \text{m}^{-3})$
1991	0.059	1996	0.071
1992	0.094	1997	0.083
1993	0.102	1998	0.088
1994	0.088	1999	0.033
1995	0.089		

表 3 灰色残差序列建模分析结果

Table 3 Analysis result of grey remnant sequence

样本	观察值/ $(\text{mg} \cdot \text{m}^{-3})$	拟合值/ $(\text{mg} \cdot \text{m}^{-3})$	$\epsilon/\text{mg} \cdot \text{m}^{-3}$	$q/\%$
X (2)	0.094	0.0927	0.0013	1.35
X (3)	0.102	0.1004	0.0016	1.55
X (4)	0.088	0.0890	-0.0010	-1.09
X (5)	0.089	0.0885	0.0005	0.56
X (6)	0.071	0.0777	-0.0067	-9.41
X (7)	0.083	0.0887	-0.0057	-6.86
X (8)	0.088	0.0752	0.0128	14.51
X (9)	0.033	0.0354	-0.0025	-7.40

差概率都达到了检测精度等级“好”的标准, 可以用灰色残差GM(1, 1)模型预测。

### 参考文献:

- [1] 邓聚龙. 灰色系统理论的GM模型[J]. 模糊数学, 1985, 5(2): 23—32.
- [2] 刘思峰, 徐忠祥. 灰色系统研究新进展[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1996. 10—45.
- [3] 周安国, 陈德全. 浙江省大气污染造成的经济损失初步估算[J]. 环境污染与防治, 1998, 20(6): 36—38.
- [4] 冯宗伟, 曹洪法, 周修萍, 等. 酸沉降对生态环境的影响及其生态恢复[M]. 北京: 中国环境科学出版社, 1999. 140—146.
- [5] 何满喜. 建立GM(1, 1)预测模型的新方法[J]. 农业系统科学与综合研究, 1997, 13(4): 241—244.
- [6] 贾海峰, 郑耀泉. 灰色时序组合预测模型及其在年降雨量预测中的应用[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(8): 42—45.
- [7] 刘思峰, 郭天榜, 党耀国. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 1999. 102—126.
- [8] 何勇. GM(1, 1)模型解法与精度问题探讨[J]. 系统工程, 1993, 11(3): 36—70.
- [9] 杨树荣. 基于地理信息系统的道路运输规划的研究[D]. 南京: 南京林业大学, 2000. 12—18.
- [10] 唐启义, 冯明光. 实用统计分析及其计算机处理平台[M]. 北京: 中国农业出版社, 1997. 388—397.

## Application of remnant GM (1, 1) to prediction of content of sulfur dioxide in atmosphere

JIANG Wen-Wei<sup>1</sup>, GUAN Yu<sup>2</sup>, WANG Zu-liang<sup>3</sup>, PAN Jun-hui<sup>4</sup>

(1. Faculty of Life Science, Zhejiang Forestry College, Lin'an 311300, Zhejiang, China; 2. Basic Department, Zhejiang Forestry College, Lin'an 311300, Zhejiang, China; 3. Management Office, National Nature Reserve of Mount Tianmu, Lin'an 311311, Zhejiang, China; 4. Monitoring Station of Environment in Lin'an City, Lin'an 311300, Zhejiang, China)

**Abstract:** By the theory and method of GM (1, 1) model, the grey remnant equation  $x(t+1) = -0.107432e^{-0.095872t} + 0.123917$  was established to predict SO<sub>2</sub> content of atmosphere in Lin'an City. Absolute value of relative error between prediction and observant values was about 0.56% to 14.51%, testifying ratio after prediction was 0.2802, and small error probability was 1.0. The results show that the model corresponds more to practicality and attains high precision. Grey model prediction method is easy to use and have common and conductive significance to construct ecological environment in future.

**Key words:** remnant GM (1, 1); testifying ratio after prediction; environmental pollution; sulfur dioxide