浙 江 林 学 院 学 报 2003, **20**(1): 95~97
Journal of Zhejiang Forestry College

文章编号: 1000-5692(2003)01-0095-03

一类无散射偏微分方程组的变换和精确解

叶彩儿
(浙江林学院 基础部, 浙江 临安 311300)

摘要: 将3 个非线性物理方程组通过近似约化, 转化为一类无散射的偏微分方程组, 然后通过变换, 化为一阶拟线性双曲型方程。利用拟线性双曲型方程的解, 得到无散射偏微分方程组的精确解。参 6

关键词: 非线性偏微分方程; 变换; 无散射偏微分方程组; 拟线性双曲型方程; 特征线解法; 精确解
中图分类号: O175.2 文献标识码: A

变换是研究和求解偏微分方程的重要工具。随着非线性学科的发展, 到现在为止, 已经提出了许多著名的变换, 有逆散射变换[1], Cole-hofe 变换, BäckLund 变换[2], Darboux 变换[3] 等等。变换可以将一个方程的求解问题转化为另一个方程的求解问题, 利用已知方程的解便可获得所求方程的解。例如逆散射变换将KdV 方程与量子力学中的Schrodinger 方程的特征值问题联系起来, 导出了 KdV 方程初值问题解, 依赖于线性积分方程, 得到了许多结果。逆散射变换非常像线性问题的 Fourier 变换方法, 所以有人称之为非线性的 Fourier 变换。Cole-hofe 变换将空气动力学研究中出现的 Burgers 方程化成了线性热传导方程, 利用热传导方程各种定解问题的解及其性质, 就可得到 Burgers 方程的准确解。笔者将 3 个非线性物理方程组通过近似约化, 转化为一类无散射的偏微分方程组, 然后通过变换, 化为一阶拟线性双曲型方程, 利用拟线性双曲型方程的解, 得到无散射的偏微分方程组的精确解。

1 无散射的偏微分方程组[4]

设偏微分方程组:

$$u_t = F(u, u_x, \cdots v, v_x, \cdots), \quad v_t = G(u, u_x, \cdots, v, v_x, \cdots)。 \tag{1}$$

这里 F 和 G 是实函数。我们引进新的独立变量 T 和 X, 其中 $T=\varepsilon t$, $X=\varepsilon x$, 这里 ε 是一个小参数。则偏导数项可以写成: $\partial/\partial t=\varepsilon\partial/\partial T$, $\partial/\partial x=\varepsilon\partial/\partial X$。把它代入 (1), 取 ε 的一次项, 就得到无散射的偏微分方程组。为了方便, 我们把得到的无散射偏微分方程组的变量仍记为 t 和 x。

2 一阶拟线性双曲型方程及其特征线解法

设一阶拟线性双曲型方程的一般形式为:

$$u_t - k(u)\, u_x = 0。 \tag{2}$$

取 (x, t) 平面上的特征线 C, 并且 C 上每点的斜率为: $\frac{dx}{dt} = -k(u)$。则 $u(x, t)$ 沿着特征线

收稿日期: 2002-05-29
作者简介: 叶彩儿(1966—), 女, 浙江慈溪人, 讲师, 从事非线性发展方程与孤立子研究。

C 对 t 的全导数为：$\frac{du}{dt}=u_t+u_x\cdot\frac{dx}{dt}$。从而可得$\frac{du}{dt}=0$，$\frac{dx}{dt}=-k(u)$。由$\frac{du}{dt}=0$ 知，u 在 C 上为常数。设 $u=\zeta$，则$\frac{dx}{dt}=-k(u)$ 就变为$\frac{dx}{dt}=-k(\zeta)$，积分得 $x=-k(\zeta)t+c$，其中 c 为积分常数。设 $c=\phi(\zeta)$，再把 ζ 用 u 代替，得：

$$x=-k(u)t+\phi(u)。\tag{3}$$

（3）式就是方程（2）的隐式解，这里的 ϕ 是任意函数。

3 无散射偏微分方程组与一阶拟线性双曲型方程之间的变换和精确解

3.1 Boussinesq 方程组[5]

$$u_t+uu_x+v_x+su_{xx}=0,\quad v_t+(uv)_x+rv_{xx}+pu_{xxx}=0。$$

根据前面定义，可得无散射的 Boussinesq 方程组为：

$$u_t+uu_x+v_x=0,\quad v_t+(uv)_x=0。\tag{4}$$

令 $v=f(u)$，代入（4）式得：

$$u_t+uu_x+f'(u)u_x=0,\quad f'(u)u_t+u_xf(u)+uf'(u)u_x=0。\tag{5}$$

从上面 2 式中消去 u_t，得到 $f'(u)=\pm\sqrt{f(u)}$。这是一阶可分离变量的常微分方程，求得它的解为 $f(u)=\frac{(u+c)^2}{4}$，其中 c 为积分常数。把它代入（5）式，得到：

$$u_t+\frac{3u+c}{2}u_x=0。\tag{6}$$

所以无散射的 Boussinesq 方程组（4）经过变换：$v=\frac{(u+c)^2}{4}$，约化为一阶拟线性双曲型方程（6），根据（2）和（6）得：$k(u)=-\frac{3u+c}{2}$，把它代入（3）式，可得方程组（4）的解为 $x=\frac{3u+c}{2}t+\phi(u)$，$v=\frac{(u+c)^2}{4}$。

3.2 Drinfel'd-Sokolov-Wilson 方程组[5]

$$u_t+pw_x=0,\quad v_t+qv_{xxx}+2puv_x-pu_xv=0。$$

根据前面定义，可得无散射的 Drinfel'd-Sokolov-Wilson 方程组为：

$$u_t+pvv_x=0,\quad v_t+2puv_x-pu_xv=0。\tag{7}$$

令 $v=f(u)$，代入（7）得：

$$u_t+pf(u)f'(u)u_x=0,\quad f'(u)u_t+2puf'(u)u_x-pu_xf(u)=0。\tag{8}$$

从上面 2 式中消去 u_t，得：$f(u)f'^2(u)-2uf'(u)+f(u)=0$。应用二次求根公式有 $f'(u)=\frac{u\pm\sqrt{u^2-f^2(u)}}{f(u)}$。这是一阶齐次常微分方程，求得它的解为：$f(u)=\pm\sqrt{2cu-c^2}$，其中 c 为积分常数。将它代入（8）式，得到：

$$u_t+pcu_x=0。\tag{9}$$

所以无散射的 Drinfel'd-Sokolov-Wilson 方程组（7）经过变换：$v=\pm\sqrt{2cu-c^2}$，约化为一阶拟线性双曲型方程（9）。根据（2）和（9）得：$k(u)=-pc$。将它代入（3）式，得到方程组（7）的解为 $x=pct+\phi(u)$，$v=\sqrt{2cu-c^2}$。

3.3 一般 Hirota-Satsuma 耦合 KdV 方程组[6]

$$u_t=\frac{1}{2}u_{xxx}-3uu_x+3(vw)_x,\quad v_t=-v_{xxx}+3uv_x,\quad w_t=-w_{xxx}+3uw_x,$$

根据前面的定义，可得无散射的 Hirota-Satsuma 耦合 KdV 方程组为：

$$u_t=-3uu_x+3(ww)_x,\quad v_t=3uv_x,\quad w_t=3uw_x。\tag{10}$$

令 $v=f(u)$，$w=g(u)$ 代入（10）得：

$$u_t=-3uu_x+3(f(u)g(u))'u_x,\quad f'(u)u_t=3uf'(u)u_x,\quad g'(u)u_t=3ug'(u)u_x。\tag{11}$$

从上面 3 式中消去 u_t，得：$(f(u)g(u))'=2u$，两边积分可得 $f(u)g(u)=u^2+c$，其中 c 为积分常数。根据（11）式得：

$$u_t=3uu_x。\tag{12}$$

所以无散射的 Hirota-Satsuma 耦合 KdV 方程组经过变换：$v=f(u)$，$w=g(u)$，$f(u)g(u)=u^2+c$，约化为一阶拟线性双曲型方程（12）。根据（2）和（12）得：$k(u)=3u$。将它代入（3）式，得到方程组（10）的解为：

$$x=-3ut+\phi(u),\quad v=f(u),\quad w=g(u),\quad f(u)g(u)=u^2+c。$$

4 结论

本文求得了 3 个无散射偏微分方程组的精确解。从求解过程可以看出，这种方法也可用于其他的某些非线性偏微分方程组。

参考文献：

[1] Ablowitz M J. Clarkson P A. *Soliton, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering Transform* [M]. New York: Cambridge University Press, 1991.

[2] 王明亮. 非线性发展方程与孤立子[M]. 兰州：兰州大学出版社，1990.

[3] 刘式适，刘式达. 物理学中的非线性方程[M]. 北京：北京大学出版社，2000.

[4] Matsuno Y. Reduction of dispersionless coupled Korteweg-de vries equtions to the Euler-Darboux eqution [J]. *J Math Phys*, 2001, **42**(4): 1 744－1 760.

[5] Yao R X, Li Z B. New exact solution for three nonlinear evolution equations [J]. *Phys Lett A*, 2002, **297**: 196－204.

[6] Fan E G. Soliton solutions for a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation and a coupled MKdV equation[J]. *Phys Lett A*, 2001, **282**: 18－22.

Transformations of dispersionless partial differential equations and exact solutions

YE Cai-er

(Department of Basic Science, Zhejiang Forestry College, Lin'an 311300, Zhejiang, China)

Abstract: By approximate reduction, three nonlinear physical equations are changed into a kind of dispersionless partial differential equations which are converted into the first order quasilinear hyperbolic equation via transformations. The exact solutions of dispersionless partial differential equations can be obtained by using the solutions of quasilinear hyperbolic equation.

Key words: non-linear partial differential eguations; transformation; dispersionless partial differential equations; quasilinear hyperbolic equation; solution of characteristic line; exact solutions