

基于 Richards 方程的杉木树高生长模型

魏晓慧, 孙玉军, 马 炜

(北京林业大学 省部共建森林培育与保护教育部重点实验室, 北京 100083)

摘要: 利用 Richards 生长方程构建杉木 *Cunninghamia lanceolata* 树高生长模型。以福建省三明市将乐县国有林场杉木人工林为研究对象, 基于 15 块杉木人工林标准地野外调查数据, 在分析林分相对胸径(d_R)和相对树高(h_R)规律的基础上, 拟合了胸径-树高曲线、胸径-株数累积(%)曲线以及树高-株数累积(%)曲线。根据林分结构现状, 应用 SPSS 20 统计软件模拟了杉木树高生长模型。结果表明: 在 95% 置信区间内, 模型的相关指数达到了 0.993, 求得参数 $A=28.606$, $B=1.094$, $k=0.031$, $m=-0.466$, 且各参数的估计值符合杉木的生长规律。此模型大大提高了林木树高因子的模拟精度, 并为实现森林资源的优化配置提供基础数据。图 3 表 3 参 30

关键词: 森林测计学; 胸径; 树高; Richards 生长方程; 杉木

中图分类号: S758.1 文献标志码: A 文章编号: 2095-0756(2012)05-0661-06

A height growth model for *Cunninghamia lanceolata* based on Richards' equation

WEI Xiao-hui, SUN Yu-jun, MA Wei

(The Key Laboratory for Silviculture and Conservation of Ministry of Education, Beijing Forestry University, Beijing 100083, China)

Abstract: To establish a height growth model for Chinese fir (*Cunninghamia lanceolata*) on a Chinese fir plantation in Fujian Province at the Sanming City's Jiangle State-owned Forest Farm using Richards' equation, field survey data from 15 sample plots were used to simulate the tree diameter-tree height curve, the tree diameter-cumulative tree number (%) curve, and the tree height-cumulative tree number curve (%). Then data were analyzed with distributive rules for stand relative diameter (d_R) and relative height (h_R) using statistical software SPSS 20 for $P = 0.95$. Results for present stand structure were $r = 0.993$ with parameters $A = 28.606$, $B = 1.094$, $k = 0.031$, and $m = -0.466$. These parameters' estimated values were fit to the Chinese fir growth rhythm. Richards' growth equation could greatly improve forest survey indicators for tree height simulation and could provide basic data to help achieve optimal allocation of forest resources. [Ch, 3 fig. 3 tab. 30 ref.]

Key words: forest mensuration; diameter at breast height (DBH); tree height; Richards' growth equation; *Cunninghamia lanceolata*

森林可以维护地球动态平衡, 促进生态系统的大、小循环, 是人类发展不可缺少的自然资源^[1]。森林是地球上最重要的第一性能量吸收者和储存者, 决定性的能量转换者和能量供应者^[2]。森林资源具有生物、生态、经济、社会和文化等多种功能, 同时也是人类利用木材的唯一来源。人类面临着环境与发展两大问题, 环境的日益恶化促使人类保护天然林资源。这样便引发了新的问题, 天然林得到保护, 必然导致用材林的大量减少。如何使自然资源保护与木材利用兼顾协调起来, 人类只有把希望寄托在迅速

收稿日期: 2011-11-15; 修回日期: 2012-04-15

基金项目: 国家林业公益性行业科研专项项目(200904003)

作者简介: 魏晓慧, 从事森林经理和经营技术研究。E-mail: weixh.222@163.com。通信作者: 孙玉军, 教授, 博士生导师, 从事森林资源与环境监测以及生态旅游等研究。E-mail: sunyj@bjfu.edu.cn

发展的人工林事业。杉木 *Cunninghamia lanceolata* 是优良的速生丰产树种，主要分布在中国亚热带温暖湿润地区，具有生长快、产量高、材质好等优良特性，是中国优良的人工林培育资源。精确地量化杉木树高能帮助林业工作者编制各类经营数表，为实现森林资源的优化配置提供基础数据。Richards 生长方程具有广泛的适用性，能很好地模拟树木生长的各个阶段。李凤日等^[3]分析了 Richards 函数的适应性，认为其具有合理解析性和良好的预测性。惠淑荣等^[4]针对日本落叶松 *Larix kaempferi* 林分生长量建立了 Richards 生长方程，认为其精度检验性好，预估效果良好，适用于生产实际。程毛林^[5]对 Richards 模型进行了参数估计并探讨了模型的应用性，认为其对数据的拟合效果很好，适应性较强。Richards 生长方程可以很好地精确定量化描述树高。邢黎峰等^[6]根据毛白杨 *Populus tomentosa*，华北落叶松 *Larix principis-rupprechtii*，刺槐 *Robinia pseudoacacia* 和斑克松 *Pinus banksiana* 的生长资料，探讨了 Richards 生长方程的可塑性。目前，在杉木方面的研究较少。为推进杉木人工林的培育，解决中国用材林缺乏的困境，本研究以福建省三明市将乐国有林场杉木人工林为研究对象，探讨 Richards 生长方程对杉木树高因子的预估精度。

1 材料与方法

1.1 实验区概况

实验区位于福建省将乐县将乐国有林场。将乐县位于福建省西北部， $26^{\circ}26' \sim 27^{\circ}04' N$ ， $117^{\circ}05' \sim 117^{\circ}40' E$ ，地处武夷山脉东南部，以中、低山为主，最高峰陇西山海拔 1 620 m。属亚热带季风气候，具有海洋性和大陆性气候特点，年平均气温为 18.7 $^{\circ}C$ ，年降水量 1 672.3 mm，无霜期 273 d。境内气温较高，夏季时间长，冬天较暖和，霜冻较少，生长期长。根据全国杉木专业调查福建试点技术总结的土壤普查，将乐县土壤有 6 个土类 15 亚类 44 个土属。境内土类多样，其中红壤水湿条件比较好，是栽培杉木的好土壤。实验区野外调查样地杉木林的林下草本种类共 23 种，其中芒萁 *Dicranopteris dichotoma* 分布最多。杉木林下灌木种类共 16 种，其中粗叶榕 *Ficus hirta* 分布最多。杉木林下更新幼木种类共 7 种，其中杉木分布最多。本研究的杉木林调查样地主要依据现有林分经营状况来筛选，功能规划时主要依据地理位置、生态环境、临近居民经济状况等自然与社会因素。试验点概况见表 1。

表 1 杉木人工林试验点概况

Table 1 Chinese fir plantation sites situation

年龄/a	分布区	林种	权属	树种组成	郁闭度
5	水南村	速生丰产林	集体	7 杉木+3 马尾松	0.2
5	水南村	速生丰产林	集体	10 杉木	0.2
13	水南村	游憩林	国有	10 杉木	0.7
17	元挡村	速生丰产林	国有	10 杉木	0.9
18	水南村	速生丰产林	集体	5 杉木+5 马尾松	0.5
18	水南村	涵养水源林	国有	10 杉木	1.0
23	水南村	速生丰产林	集体	9 杉木+1 马尾松	0.8
24	水南村	速生丰产林	集体	10 杉木	0.8
24	元挡村	速生丰产林	国有	10 杉木	0.7
27	水南村	速生丰产林	国有	10 杉木	0.8
32	元挡村	速生丰产林	国有	10 杉木	0.8
33	水南村	速生丰产林	集体	5 杉木+5 马尾松	0.8
30	水南村	速生丰产林	集体	10 杉木	0.5
36	元挡村	游憩林	国有	10 杉木	0.8
38	水南村	速生丰产林	集体	10 杉木	0.5

1.2 实验设计与野外数据采集

1.2.1 实验设计 在实验区内主要依据速生丰产林、游憩林、涵养水源林来设置标准地。杉木人工林标准地共 15 块(表 1)，依据样地地理状况和杉木林下植被的多样性状况来确定标准地面积。标准地最大为 20 m × 30 m，最小为 20 m × 20 m。

1.2.2 林分调查数据 杉木林树高和胸径结构研究的标准地：在样地内对每株树测定树高、胸径、地径、冠幅、活下枝高、死下枝高、枯枝百分比。林木树高与胸径具有显著的相关性，在森林经理学中树高与胸径是最重要的调查因子，易于调查，测量误差小，可为杉木人工林的定向培育提供可靠的理论与实践依据。将野外调查的杉木树高数据和胸径数据综合，用 Excel 表格拟合树高胸径数据，根据模拟的趋势线剔除不合理的数据。精确的胸径—树高关系对于预测单木材积或林分材积十分重要^[7-8]。利用这些数据求出林分相对胸径 d_R 和相对树高 h_R 。 $d_R=d/D_g$ 。其中： d_R 为树木的相对胸径值， d 为树木的实际胸径值， D_g 为林分平均胸径^[9]。 $h_R=h/H_D$ 。其中： h_R 为树木的相对树高， h 为树木实际树高值， H_D 为林分平均高。野外调查的福建省将乐县国有林场杉木林的数据拟合胸径—树高曲线如图 1，胸径—株数累积(%)曲线图 2，和树高—株数累积(%)曲线如图 3。由图 2 和图 3 可知，胸径与树高相比，胸径的变化幅度较大。

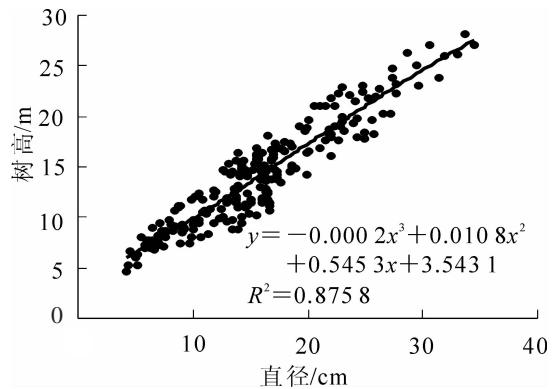


图 1 胸径—树高曲线

Figure 1 Diameter-tree height curve

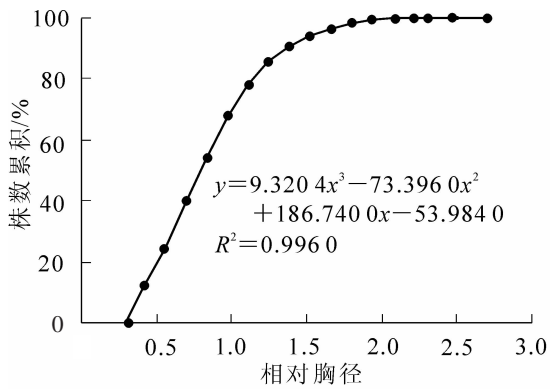


图 2 胸径—株数累积曲线

Figure 2 Diameter-tree number accumulative curve

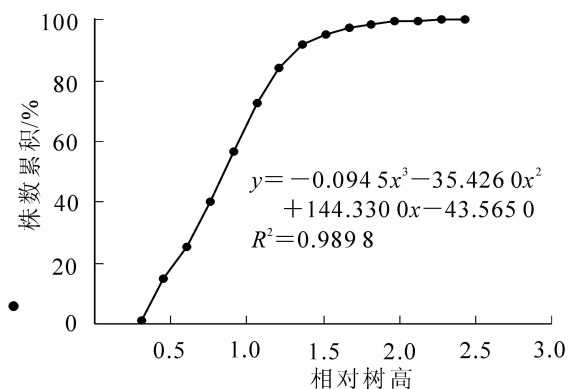


图 3 树高—株数累积曲线

Figure 3 Height-tree number cumulative curve

2 Richards 生长方程

2.1 Richards 生长方程的数学性质及生物学特性

2.1.1 Richards 生长方程的数学性质 理论生长方程可以在一定程度上描述生物生长规律，利用生物群体或个体生长特征可以构造时间变化模型^[10]。Richards 生长方程^[11]由 von Bertalanffy 生长理论方程^[12]扩展而来，具有很强的灵活性，当参数的取值范围不同时，可以转化成不同的生长方程^[3]。当参数 m 取值不同时，可以转化成 Logistic 生长方程^[13-14]、Mitscherlich^[15-16]生长方程和 Gompertz 生长方程^[17-18](表 2)。Richards 生长方程具有广泛的适应性、合理解析性和良好的拟合预测性，故此方程是近代林业应用最为广泛的一类生长曲线方程^[19]。

2.1.2 Richards 生长方程的生物学特性 Richards 生长方程参数 A, B, k, m 中， $A > 0, k > 0$ ，其中： A 代表方程的最终值即树木生长的最大值，参数 k 与树木生长速度相关，代表树木的生长速率。参数 m 与方程曲线的形状相关，决定拐点的位置，生长方程拐点的取值与方程模拟精度密切相关，拐点精确度愈高，则方程模拟精度越高。参数 B 与树木生长因子相关，决定着 $t=0$ 时，生长因子的大小。参数 k 与

表2 Richards 生长方程在理论上与其他生长方程之间的转换

Table 2 Conversion between Richards growth equation and other growth equation in theory

参数取值	相应理论方程表达式及其数学性质
$m < 0$	$y = A(1 - Be^{-kt})^{\frac{1}{1-m}}$, $A, B, k > 0$ 。这类 Richards 方程不存在拐点, 但仍有渐近线 $y=A$ 及与时间轴的交点 t_0 , A 是树木生长的极大值。
$m=0$	$y = A(1 - Be^{-kt})$, $A, B, k > 0$ 。转化为 Mitscherlich 生长方程, 有渐近线 $y=A$, 但是单分子式不存在拐点。
$0 < m < 1$	$y = A(1 - Be^{-kt})^{\frac{1}{1-m}}$, $A, B, k > 0$ 。这是 Richards 常用表达形式(当 $B=1$ 具有 $t=0$ 时, $y=0$ 的初始条件), 可用于不同生物的生长模拟, 对树木生长具有广泛的适用性。
$m \rightarrow 1$	$y = Ae^{-Be^{-kt}}$, $A, B, k > 0$ 。转化为 Gompertz 生长方程, 存在 2 条渐近线 $y=A$ 和 $y=y_0$ 。其中: A 是树木生长的极大值, 有一个拐点其坐标为 $t = \frac{\ln B}{k}$, $y = \frac{A}{e}$, 此处的最大生长速率为 $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{\max} = \frac{Ak}{e}$ 。
$m > 1$	$y = A(1 + Be^{-kt})^{\frac{1}{1-m}}$, $A, B, k > 0$ 。此方程称为 Logistic 型, 当 $m=2$ 时化为 Logistic 方程, 即 $y = A(1 + Be^{-kt})^{-1}$, 存在 2 条渐近线 $y=A$ 和 $y=y_0$ 。其中: A 是树木生长的极大值, 有一个拐点其坐标为 $t = \frac{\ln B}{k}$, $y = \frac{A}{2}$, 此处的最大生长速率为 $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{\max} = \frac{Ak}{4}$ 。

林龄、立地指数、平均胸径、林木密度相关性较大, 且林龄对参数 k 的取值大小影响最大。林龄、平均树高、平均胸径、密度对参数 m 的相关性依次减弱。林分因子平均树高、平均胸径、密度对参数 B 的显著性影响依次减弱。张建国等^[20]关于杉木人工林林分胸径结构模拟研究表明: 参数 k 和参数 m 与林龄、平均胸径均呈正相关, 但与林分密度呈负相关。参数 k 与立地株数呈负相关, 参数 m 与平均树高也呈负相关。

2.2 Richards 生长方程的拟合实例

Richards 生长方程是典型的非线性回归模型, 采用 SPSS 数据统计分析软件来估计 Richards 模型的参数。其参数先由经验值及林分树高、胸径分布曲线估计初值, 假定初始参数值: $A=30$, $B=1$, $k=0.1$, $m=0$, 采用 SPSS 20 统计软件包中所提供的麦考特(Marquardt)迭代法, 经 24 步迭代得到 Richards 方程的参数估计值见下表 3。

表3 杉木树高生长模型 $y = A(1 - Be^{-kt})^{\frac{1}{1-m}}$ 参数估计值Table 3 Height growth model $y = A(1 - Be^{-kt})^{\frac{1}{1-m}}$ of Chinese fir parameters estimated value

参数	参数渐进估计值	渐进标准误	参数估计值 95%的置信区间	
			下限	上限
A	28.606	1.164	25.858	33.040
B	1.094	0.018	1.053	1.129
k	0.031	0.006	0.010	0.034
m	-0.466	0.225	-1.342	-0.451

相关指数 $R^2=0.993$, 残差平方和(RSS)=6.932, 残差均方(MSE)=0.289, 此树高生长模型中的 y 代表树高, t 代表树木生长时间。从表 3 可知杉木树高生长模型拟合结果:

$$y = 28.306(1 - 1.094e^{-0.031t})^{\frac{1}{1.466}}$$

3 结论与展望

Richards 方程的标志是它的灵活性和较高的模拟精度, 因此, 在林分结构研究中具有广泛的应用。根据野外调查的杉木林分年龄、胸径、树高数据, 采用残差平方和进行精度分析, 筛选出 Richards 生长方程关于杉木的最优参数。且可以根据不同林分的调查数据, 筛选出各自的 Richards 生长方程参数。根

据多个林分的参数变化特点，从中总结出福建省将乐县的林分生长特性。

林分年龄和树高在林分结构和预测树木材积中占有重要的作用。从表 3 Richards 方程对杉木树高生长的模拟结果可知，参数 $A=28.606$ ， $B=1.094$ ， $k=0.031$ ， $m=-0.466$ ，满足条件 $m<0$ ， A ， B ， $k>0$ ，这类 Richards 方程不存在拐点，但仍有渐近线 $y=A$ ， A 是树木生长的极大值。相当于理想的生长曲线，曲线形状类似于“肩形”，是一种近似的“S”形，能很好地描述初始生长速率较快的杉木树高生长过程。参数 m 从数学上看与方程曲线的形状相关，决定拐点的位置，在生物学意义上与树木的同化作用相关。树木生长具有不可逆性和生长的阻滞性，只有满足 $0<m<1$ 时，Richards 方程模拟树木生长才具有生物学意义，但在实际拟合时可能出现模拟的参数值不符合生物学意义即 $m<0$ 的情况。本研究模拟的树高生长模型参数 $m=-0.466$ 。Richards 生长方程的各个参数值较合理，且符合杉木的生长规律。这对把握林分动态、预估林分生长状态有极其重要的意义。

杉木林树高生长模型对分析和经营管理杉木林非常重要，通过它可以预测树木的生长状况^[21-25]。树高生长模型能定量反映树木生长动态变化过程，并利于在森林经营管理过程中实施调控林分结构的措施。随着社会环境的变化、林学专业基础知识的变化以及社会对林业信息需求的转变，对林分生长模型提出了新的更高要求，理论生长方程需要具有良好的理论解释性、模拟性能及生物学上的意义。目前，林业工作者认为预测和实践推理是研究森林生态系统动态变化的最大挑战^[26-28]。构建森林生长预估模型始终是森林工作者的首要任务^[29]。

随着越来越多的数学理论和方法应用在森林生态研究中，理论生长方程在深度和广度 2 个方面都会得到发展^[30]。依据 Richards 生长方程的定量描述，再与运筹学、矩阵理论、系统动力学以及控制论相结合，可以更直观清晰地了解杉木林的生长状态，使经营的林分更健康。

参考文献：

- [1] DAILY G C. *Nature's Services: Societal Dependence on Natural Ecosystems* [M]. Washington D C: Island Press, 1997.
- [2] 廖成勇, 刘艳. 现代林业理论研究概述[J]. 科学时代, 2009 (2): 75 - 79.
LIAO Chengyong, LIU Yan. Introduction to the theory of modern forestry research [J]. *Sci Times*, 2009 (2): 75 - 79.
- [3] 李凤日, 吴俊民, 鲁胜利. Richards 函数与 Schnute 生长模型比较[J]. 东北林业大学学报, 1993, 21 (4): 15 - 24.
LI Fengri, WU Junmin, LU Shengli. The comparison between Richards growth function and the Schnute model [J]. *J Northeast For Univ*, 1993, 21 (4): 15 - 24.
- [4] 惠淑荣, 于洪飞. 日本落叶松林分生长量 Richards 生长方程的建立与应用[J]. 生物数学学报, 2003, 18 (2): 204 - 206.
HUI Shurong, YU Hongfei. The application of Richards growth equation in stand growth estimate [J]. *J Biomath*, 2003, 18 (2): 204 - 206.
- [5] 程毛林. Richards 模型参数估计及其模型应用[J]. 数学的实践与认识, 2010, 40 (12): 139 - 143.
CHENG Maolin. Parameter estimation of Richards model and its application [J]. *Mathem Pract Theory*, 2010, 40 (12): 139 - 143.
- [6] 邢黎峰, 法永乐, 陈文周, 等. Richards 林木生长模型及其适用性[J]. 山东林业科技, 1997 (5): 16 - 19.
XING Lifeng, FA Yongle, CHEN Wenzhou, et al. Richards growth model's utility of standing timber [J]. *J Shandong For Sci Technol*, 1997 (5): 16 - 19.
- [7] CURTIS R O. Height-diameter and height-diameter-age equations for second-growth Douglas-fir [J]. *For Sci*, 1967, 13 (4): 365 - 375.
- [8] 李希菲, 唐守正, 袁国仁, 等. 自动调控树高曲线和一元立木材积模型[J]. 林业科学研究, 1994, 7 (5): 512 - 518.
LI Xifei, TANG Shouzheng, YUAN Guoren, et al. Self-adjusted height-diameter curves and one entry volume model [J]. *For Res*, 1994, 7 (5): 512 - 518.
- [9] 孟宪宇. 测树学[M]. 2 版. 北京: 中国林业出版社, 1995.
- [10] ZEIDE B. Analysis of growth equations [J]. *For Sci*, 1993, 39 (3): 594 - 616.

- [11] RICHARDS F J. A flexible growth for empirical use [J]. *J Exp Bot*, 1959, **10** (2): 290 – 300.
- [12] von BERTALANFFY L Br. Quantitative laws in metabolism and growth [J]. *Quart Rev Biol*, 1957, **32** (3): 217 – 231.
- [13] 李文灿. 对 Logistic 方程的再认识[J]. 北京林业大学学报, 1990, **12** (2): 121 – 127.
LI Wencan. Recognition of the Logistic equation [J]. *J Beijing For Univ*, 1990, **12** (2): 121 – 127.
- [14] von GADOW K, HUI Gangying. *Modelling Forest Development* [M]. Göttingen: Cuvillier Erlag, 1998.
- [15] MITSCHERLICH E A. Problems of plant growth [J]. *Landwirtschaftliche Jahrbucher*, 1919, **53**: 167 – 182.
- [16] RICKER W E. 11 Growth rates and models [J]. *Fish Physiol*, 1979, **8**: 677 – 743.
- [17] WINSOR C P. The Gompertz curve as a growth curve [J]. *Proc Natl Acad Sci USA*, 1932, **18** (1): 1 – 9.
- [18] 吴承祯, 洪伟. 杉木人工林胸径结构模型的研究[J]. 福建林学院学报, 1998, **18** (2): 110 – 113.
WU Chengzhen, HONG Wei. Study on diameter structure model of Chinese fir plantation [J]. *J Fujian Coll For*, 1998, **18** (2): 110 – 113.
- [19] 段爱国, 张建国, 童书振. 6种生长方程在杉木人工林林分胸径结构上的应用[J]. 林业科学研究, 2003, **16** (4): 423 – 429.
DUAN Aiguo, ZHANG Jianguo, TONG Shuzhen. Application of six growth equation on stands diameter structure of Chinese fir plantations [J]. *For Res*, 2003, **16** (4): 423 – 429.
- [20] 张建国, 段爱国. 理论生长方程对杉木人工林林分胸径结构的模拟研究[J]. 林业科学, 2003, **39** (6): 55 – 61.
ZHANG Jianguo, DUAN Aiguo. Approach to theoretical growth equations for modelling stands diameter structure of Chinese fir plantations [J]. *Sci Silv Sin*, 2003, **39** (6): 55 – 61.
- [21] CHEN Jian, FRANKLIN J F, SPIES T A. Growing-season microclimate gradients from clearcut edges into old-growth Douglas-fir forests [J]. *Ecol Appl*, 1995, **5** (1): 74 – 86.
- [22] BUONGIORNO J, DAHIR S, LU H C, *et al.* Tree size diversity and economic returns in uneven-aged forest stands [J]. *For Sci*, 1994, **40** (1): 83 – 103.
- [23] LONG J N, SMITH F W. Volume increment in *Pinus contorta* var. *latifolia*: the influence of stand development and crown dynamics [J]. *For Ecol Manage*, 1992, **53** (1/4): 53 – 64.
- [24] RUNKLE J R. Gap dynamics of old-growth eastern forests: management implications [J]. *Nat Areas J*, 1991, **11** (1): 19 – 25.
- [25] SPIES T A, FRANKLIN J F. The structure of natural young, mature, and old-growth Douglas-fir forests in Oregon and Washington [G]//AUBRY K B, BROOKES M H. *General Technical Report PNW-GTR-285*. Oregon: US Department of Agriculture, Forest Service, 1991: 91 – 111.
- [26] CARPENTER S R. Ecological futures: building an ecology of the long now [J]. *Ecology*, 2002, **83** (8): 2069 – 2083.
- [27] COSTANZA R, d'ARCE R, de GROOT R, *et al.* The value of the world's ecosystem services and natural capital [J]. *Nature*, 1997, **387**: 253 – 260.
- [28] PIELKE R A Jr, CONANT R T. Best practices in prediction for decision-making: lessons from the atmospheric and earth sciences [J]. *Ecology*, 2003, **84** (6): 1351 – 1358.
- [29] VANCLAY J K. Growth models for tropical forests: a synthesis of models of models and methods [J]. *For Sci*, 1995, **41** (1): 7 – 42.
- [30] 张庆国. 国际数学生态学研究进展: Alcalá 第 2 届国际数学生态学大会介绍[J]. 生态学报, 2004, **24** (2): 393 – 394.
ZHANG Guoqing. Research on international mathematics ecology progress: Alcalá second international conference on mathematical ecology [J]. *Acta Ecol Sin*, 2004, **24** (2): 393 – 394.