

引用格式: 张薇, 陈冠谋, 蔺雪莹, 等. 基于非线性混合效应分位数回归的长白落叶松人工林最大冠幅预测模型[J]. 浙江农林大学学报, 2026, 43(X): 1-11. ZHANG Wei, CHEN Guanmou, LIN Xueying, *et al.* Maximum crown width prediction model for *Larix olgensis* plantations based on nonlinear mixed-effects quantile regression[J]. *Journal of Zhejiang A&F University*, 2026, 43(X): 1-11.

基于非线性混合效应分位数回归的长白落叶松 人工林最大冠幅预测模型

张 薇, 陈冠谋, 蔺雪莹, 董灵波

(东北林业大学 林学院 森林生态系统可持续经营教育部重点实验室, 黑龙江 哈尔滨 150040)

摘要: 【目的】突破传统平均冠幅建模方法在刻画林木空间极限扩展能力方面的不足, 准确描述林木在密度约束下的最大冠幅生长潜力, 进而为合理调控林分密度提供理论依据。【方法】以最大冠幅预测为核心目标, 以张广才岭西坡的 91 块长白落叶松 *Larix olgensis* 人工林固定样地调查数据为基础, 采用 Reineke 尺度-密度关系计算相对林分密度, 分别采用分位数回归和非线性混合效应分位数回归构建长白落叶松人工林最大冠幅-胸径预测模型, 并采用均方根误差 (RMSE)、调整后决定系数 (R_{adj}^2) 等对各模型的拟合结果进行评价。【结果】与基础最大冠幅模型相比, 引入相对林分密度的广义最大冠幅模型在拟合效果上略有改善, R_{adj}^2 提高约 10.6%, RMSE 降低约 2.8%; 分位数最大冠幅模型的整体拟合精度低于基础最大冠幅模型, R_{adj}^2 下降约 19.8%, RMSE 增加约 19.3%; 相比之下, 分位数 (τ)=0.90 的非线性混合效应分位数最大冠幅模型表现出明显优势。与基础最大冠幅模型相比, 其 R_{adj}^2 提高 52.6%, RMSE 降低 13.8%。不同密度等级下的 $\tau=0.90$ 分位曲线存在显著差异 ($P<0.05$); 在相同胸径条件下, 相对林分密度为 0.2 对应的最大冠幅整体最高, 而相对林分密度为 0.8 时最低, 表明低密度条件有利于林木潜在冠幅扩展, 而高密度条件下树冠生长受到明显抑制。不同密度等级的分位曲线在中、大径级 (胸径 ≥ 22 cm) 阶段出现交叉, 反映了密度效应随径级变化而发生变化。检验结果表明各模型预测性能从高到低依次为非线性混合效应分位数最大冠幅模型、广义最大冠幅模型、基础最大冠幅模型、分位数最大冠幅模型。【结论】非线性混合效应分位数回归方法能够有效刻画不同相对林分密度下长白落叶松人工林最大冠幅的变化规律, 特别是在 $\tau=0.90$ 分位水平上, 模型揭示了最大冠幅随密度等级由低到高逐渐减小的总体趋势, 不同密度等级在不同径级发生变化的阈值, 表明林分密度对林木潜在冠幅生长的调控并非恒定不变。该方法在解释样地水平中个体差异的同时, 提高了模型稳定性和预测精度, 可为长白落叶松人工林不同生长阶段的密度调控和精细化经营管理提供依据。图 1 表 5 参 38

关键词: 长白落叶松; 非线性混合效应分位数回归; 相对林分密度; 冠幅模型

中图分类号: S758 文献标志码: A 文章编号: 2095-0756(2026)00-0001-11

Maximum crown width prediction model for *Larix olgensis* plantations based on nonlinear mixed-effects quantile regression

ZHANG Wei, CHEN Guanmou, LIN Xueying, DONG Lingbo

(Ministry of Education Key Laboratory of Sustainable Forest Ecosystem Management, College of Forestry, Northeast Forestry University, Harbin 150040, Heilongjiang, China)

Abstract: [Objective] This study aims to overcome the limitations of traditional average crown width modeling methods in depicting the spatial extreme expansion capabilities of trees, accurately describing the maximum crown width growth potential of trees under density constraints, and providing a theoretical basis for reasonable stand density management. [Method] Based on field survey data from 91 permanent sample plots

收稿日期: 2026-02-06; 修回日期: 2026-06-01

基金项目: 国家自然科学基金项目 (32171778)

作者简介: 张薇 (ORCID: 0009-0000-8344-5600), 从事森林培育与经营研究。E-mail: 840523638@qq.com。通信作者: 董灵波 (ORCID: 0000-0003-0079-2688), 从事森林培育与经营研究。E-mail: farrell0503@126.com

of *Larix olgensis* plantations located on the western slope of Zhangguangcai Mountains, relative stand density (RD) was calculated using Reineke's stand density relationship. Quantile regression and nonlinear mixed-effects quantile regression were employed to construct maximum crown width–diameter at breast height (DBH) models, and model performance was evaluated using the root mean square error (RMSE) and adjusted coefficient of determination (R_{adj}^2). [Result] Compared to the base maximum crown width model, the generalized maximum crown width model with the inclusion of RD shows slight improvements in fitting performance, with R_{adj}^2 increasing by approximately 10.6% and RMSE decreasing by about 2.8%. The overall fitting accuracy of the quantile maximum crown width model is lower than that of the base maximum crown width model, with R_{adj}^2 decreasing by about 19.8% and RMSE increasing by about 19.3%. In contrast, the nonlinear mixed-effects quantile maximum crown width model at $\tau=0.90$ shows significant advantages ($P<0.05$). Compared to the base model, its R_{adj}^2 increases by approximately 52.6% and RMSE decreases by about 13.8%. The $\tau=0.90$ quantile curves at different density levels show significant differences. Under the same diameter conditions, the maximum crown width corresponding to RD=0.2 is generally the highest, while that for RD=0.8 is the lowest, indicating that low-density conditions are more conducive to the potential crown expansion of trees, while crown growth is significantly suppressed under high-density conditions. The quantile curves for different density levels crossed at medium and large diameter stages (DBH ≥ 22 cm), reflecting the variation of density effects with diameter class. The test results showed that the model performance in prediction was ranked as follows: nonlinear mixed-effects quantile maximum crown width model > generalized maximum crown width model > base maximum crown width model > quantile maximum crown width model. [Conclusion] Indicate that nonlinear mixed-effects quantile regression is effective in capturing variations in maximum crown width of *L. olgensis* plantations across different RD levels. Particularly at the $\tau=0.90$ quantile, the model not only reveals an overall decreasing trend in maximum crown width with increasing stand density, but also identifies diameter-dependent thresholds at which density effects shift, demonstrating that the regulatory influence of stand density on potential crown expansion is not constant across growth stages. By accounting for plot-level heterogeneity while improving model stability and prediction accuracy, this approach provides a robust quantitative basis for density regulation and precision management of *L. olgensis* plantations at different developmental stages. [Ch, 1 fig. 5 tab. 38 ref.]

Key words: *Larix olgensis*; nonlinear mixed-effects quantile regression; relative stand density; crown width model

树冠是林木光合作用和碳水化合物形成的主要场所,其形态与大小不仅反映树木的竞争地位、生长活力与健康状况,也是决定林木生长过程与林地生产力的重要结构特征^[1]。因此,树冠相关指标常被作为生长和枯损模型中的关键协变量,用于揭示经营措施对林木个体生长及林分生产力的影响^[2-4]。其中,冠幅作为描述树冠空间结构的核心参数,与树冠体积、冠层投影面积以及光能利用效率密切相关^[5],最大冠幅更能反映林木在最佳生长条件下的潜在扩展能力,对林分密度调控和经营决策具有重要价值。

已有研究表明:冠幅受胸径、树高等单木因子以及林分密度、郁闭度等林分因子的共同调控^[6]。其中,胸径和林分密度被认为是影响冠幅的最关键变量^[7]。密度过高会抑制树冠扩展,而适宜的密度则有助于树冠充分生长,提升光能利用效率和森林生产力^[8-9]。因此,基于胸径、树高、林分密度等因子的关系,可以构建冠幅预测模型,为林分密度调控和经营措施制定提供科学依据^[10-11]。

近年来,国内外学者围绕林木冠幅模型开展了大量研究,主要集中在冠幅与胸径及其他因子的关系。GILL等^[12]针叶树数据构建了树冠半径模型,认为胸径作为单一自变量能提供可靠估计;HEMERY等^[13]研究了11种阔叶树的冠幅-胸径关系,发现二者呈近似线性关系,决定系数可达0.8;CONDÉS等^[14]利用西班牙森林资源清查数据建立多个树种的冠幅模型,并指出高径比是影响冠幅的重要因子。邱思玉

等^[15]对黑龙江省长白落叶松人工林的研究表明,冠幅除与胸径密切相关外,还受到树高、高径比和冠长率等因子影响。总体来看,现有研究主要关注林木的平均冠幅及其影响因素,而针对林木在高分位或最优生长状态下的最大冠幅预测研究相对较少,尤其缺乏对林分密度调控作用的系统刻画,限制了冠幅模型在密度调控和精细化经营中的应用。

非线性混合效应分位数回归模型是将传统分位数回归与混合效应模型相结合的一种高效统计建模方法。该模型的主要优势在于能够同时处理固定效应和随机效应,从而更好地捕捉数据中的复杂非线性关系和个体差异^[16]。在模型构建中,采用了期望最大化(EM)算法^[17],通过完全似然推理处理数据中的不确定性。混合效应的引入使得模型能够有效考虑不同层级的随机性,而分位数回归则提供了更强的鲁棒性(Robustness),能够应对异常值的影响,在林业研究领域常被应用于处理树木生长、冠幅预测和密度调控等复杂数据问题。非线性混合效应分位数回归模型相较于传统线性回归模型能更好地适应群体间的差异性,提高模型的稳定性和拟合效果。GALARZA 等^[18]和 DELYON 等^[19]的研究验证了分位数回归在提高模型鲁棒性方面的有效性,并强调了结合混合效应模型的必要性,在处理林业数据时能更准确地预测和解释林木的生长特征。

长白落叶松 *Larix olgensis* 是长白山和张广才岭林区主要的人工造林树种,在东北林区人工林经营中具有重要地位,在生产利用、密度调控和经营管理上更具实践价值。张广才岭西坡的长白落叶松人工林分布集中、生长良好,适合开展林分结构优化与密度经营研究。基于此,本研究以张广才岭西坡长白落叶松人工林为研究对象,采用非线性混合效应分位数回归方法构建林木最大冠幅预测模型,以揭示最大冠幅与林分密度之间的关系,为长白落叶松人工林密度调控和可持续经营提供科学依据。

1 研究区与方法

1.1 研究区概况

研究区域位于黑龙江省南部的张广才岭林区,45°20′~45°25′N,127°30′~127°34′E,地处温带大陆性季风气候区,海拔范围为 200~600 m,平均海拔为 400 m。年均气温为 2.4 ℃,极端高温可达 34.0 ℃,极端低温为-40.0 ℃,冬季寒冷干燥,春季降水量较少,夏季雨量充沛,年降水量为 500~600 mm,主要集中在 6—8 月。研究区的土壤类型较为多样,主要包括黑土、山地棕壤、山地灰壤以及湿地土壤等。植被类型以温带针阔混交林为主,主要乔木树种包括红松 *Pinus koraiensis*、白桦 *Betula platyphylla*、水曲柳 *Fraxinus mandshurica*、胡桃楸 *Juglans mandshurica* 等,主要灌木有茶条槭 *Acer ginnala*、忍冬 *Lonicera japonica* 等,主要草本植物有藁草 *Carex tristachya* 和地榆 *Sanguisorba officinalis* 等。

1.2 数据来源

在全面踏查的基础上,2018、2019 年和 2023 年在帽儿山实验林场分别设立 15、20 和 20 块固定样地,2023 年在哈尔滨胜利实验林场设立 36 块固定样地,总计 91 块;对样地内胸径 ≥ 5 cm 的乔木进行每木调查,记录树种、胸径、树高、冠幅(东、西、南、北 4 个方向)、坐标及生长状态等信息,共测长白落叶松 5 881 株。单木冠幅(CW)采用 4 个方向冠幅的算术平均值表示。对每块样地按 2 cm 径阶进行整化,在各径阶内选取树高最大的个体作为优势木,树高与冠幅通常呈显著正相关关系,且树高较大的个体一般具有较强的生长势和空间占据能力,其冠幅更接近林木在弱竞争条件下的潜在扩展极限。因此,选取树高最大个体可作为该径级最大冠幅特征的代表,共筛选出 967 株,构建优势木子集用于模型精度检验。模型参数估计基于 5 881 株样木数据完成。优势木子集占总样本量的 15.0%,旨在检验模型对潜在最大冠幅上界的刻画能力,建模数据及检验数据统计特征见表 1。

1.3 研究方法

在已有研究基础上^[20],选择 Logistic 函数作为基础最大冠幅模型(basic maximum crown width model, BMCW)。在此基础上,引入相对林分密度(D_R)作为关键竞争因子,构建广义最大冠幅模型(generalized maximum crown width model, GMCW),以反映在不同密度条件下最大冠幅随胸径变化的差异。由于传统均值回归模型难以刻画冠幅分布上界特征,研究在 GMCW 基础上采用分位数回归方法,分别在分位数(τ)=0.90、0.95 和 0.99 等 3 个高分位水平构建分位数最大冠幅模型(quantile maximum crown width model, QMCW),用于刻画最大冠幅的上包络特征与潜在生长上限。基于模型评价结果确定的最优分位

表 1 长白落叶松人工林固定样地基本信息统计量

Table 1 Basic statistics of fixed plots in <i>L. olgensis</i> plantation										
数据	项目	胸径/cm	树高/m	冠幅/m	林分平均 胸径/cm	林分平均 高/cm	林分立 地指数	林分密度/ (株·hm ⁻²)	相对林 分密度	林分年龄/a
建模	最大值	40.5	37.6	8.1	30.5	27.0	31.7	3 144	1.00	43.5
	最小值	5.0	4.0	0.3	10.0	11.0	11.3	278	0.24	11.6
	平均值	17.5	16.9	3.1	20.1	17.8	18.2	718	0.67	30.7
	标准差	6.5	4.8	1.2	4.3	3.7	3.9	484	0.19	7.6
检验	最大值	40.5	37.6	8.0	29.4	27.9	31.7	3 144	1.00	43.5
	最小值	5.0	4.0	0.3	11.2	12.9	11.3	278	0.24	11.6
	平均值	20.1	19.7	3.4	19.8	19.6	18.2	718	0.61	30.7
	标准差	7.7	5.4	1.4	3.6	3.4	3.9	484	0.18	7.6

点，在此基础上引入样地层级随机效应，构建非线性混合效应分位数最大冠幅预测模型 (nonlinear mixed-effects quantile maximum crown width model, NME-QMCW)，以同时兼顾最大冠幅的分位特征与不同样地之间的异质性差异。

1.3.1 广义最大冠幅模型 冠幅-胸径关系为非线性关系，用来描述冠幅-胸径关系的模型为非线性模型。在参考已有研究选择 Logistic 模型作为 BMCW。模型公式如下：

$$W_C = \frac{a}{1 + b \exp(-cD)}。$$

(1)

式 (1) 中： W_C 为林木冠幅 (m)； D 为林木胸径 (cm)； a 为渐近值参数，表示在胸径趋于无限大时林木冠幅的理论最大上限，即潜在最大冠幅水平； b 为尺度参数，主要影响曲线在小径级阶段的起始位置和整体平移程度； c 为生长速率参数，反映冠幅随胸径增加的扩展速度，决定曲线达到渐近值的快慢。

为量化林分竞争水平，首先基于 Reineke 尺度-密度关系^[21](size-density relationship, SDR) 拟合最大密度线。最大密度线的确定目前尚无统一规则，综合考虑手绘法、区间法及其他各种可选方法的特点^[22-23]，本研究以 95% 分位数的林分密度 (N) 作为最大林分密度 ($N_{\max}$)，使用 $\tau=0.95$ 回归对 $\ln(N)$ 与 $\ln(D)$ 进行拟合，以估计林分的理论最大林分密度 $\ln(N_{\max})$ 。为检验胸径与 D_R 之间的多重共线性问题，计算方差膨胀因子 (VIF)。结果显示， D 与 D_R 的 VIF 均为 1.007，表明两变量之间不存在显著的多重共线性问题。随后，将观测密度 $\ln(N)$ 与 $\ln(N_{\max})$ 的比值作为 RD 的估计，并将 RD 引入基础最大冠幅模型构建广义最大冠幅模型，公式如下：

$$\ln(N) = \alpha + \beta \ln(D)；$$

(2)

$$\ln(N_{\max}) = \alpha_{0.95} + \beta_{0.95} \ln(D)；$$

(3)

$$D_R = \frac{\ln(N)}{\ln(N_{\max})}；$$

(4)

$$W_C = \frac{a}{1 + (b_0 + b_1 D_R) \times \exp(-cD)}。$$

(5)

式 (2)~式 (5) 中： N 为林分密度 (株·hm⁻²)； D 为林分平均胸径 (cm)； D_R 为相对林分密度； a 、 b_0 、 b_1 、 c 、 α 、 β 为模型参数。

1.3.2 分位数最大冠幅模型 分位数回归是用于估计响应变量在给定自变量条件下特定分位数函数的方法^[24]。与传统最小二乘回归仅刻画条件均值不同，分位数回归能够响应变量条件分布的不同位置特征，从而揭示变量关系在分布上界、中位数和下界的差异。在最大冠幅预测建模中，关注的是林木在特定生长条件下可能达到的冠幅扩展上限，因此，本研究选择高分位点 $\tau=0.90$ 、 0.95 和 0.99 构建长白落叶松最大冠幅-胸径关系模型，来描述冠幅分布上界随胸径变化的规律，其中 τ 越高冠幅上界越接近最大冠幅。

为保证与基础最大冠幅模型的生物学解释一致，本研究以 Logistic 方程作为冠幅-胸径关系的基础框架，并在分位数意义下对其参数进行估计。分位数回归参数通过最小化加权绝对偏差的检验损失函数获

得, 分位数参数估计通过计算损失函数最小值获得。

$$S = \sum_{C_W \geq \widehat{C_{W\tau}}} \tau (\widehat{C_{W\tau}} - C_W) + \sum_{C_W < \widehat{C_{W\tau}}} (1 - \tau) (C_W - \widehat{C_{W\tau}}). \quad (6)$$

式 (6) 中: S 为第 τ 分位数的加权绝对残差之和; C_W 为冠幅实测值; $\widehat{C_{W\tau}}$ 为第 τ 分位数处的冠幅估计值; τ 为分位数水平。

本研究分别在 $\tau=0.90$ 、 0.95 和 0.99 时进行拟合, 以比较不同高分位水平之间的差异, 并结合模型评价指标与生物学合理性确定最优分位点, 用于后续混合效应分位数最大冠幅模型的构建与对比分析。

1.3.3 非线性混合效应分位数最大冠幅模型 在 QMCW 的基础上, 进一步考虑样地尺度上林木生长环境差异对冠幅的影响, 对最大冠幅-胸径关系进行非线性混合效应分位数回归建模, 可有效刻画不同样地之间的异质性差异, 同时保持对最大冠幅分布上界的稳健刻画能力。

非线性混合效应分位数回归通常假设误差项服从非对称拉普拉斯分布 (asymmetric Laplace distribution, ALD), 从而将分位数回归问题转化为基于完全似然的估计问题。在该框架下, 分位数回归可等价表示为 ALD 假设下的最大似然估计问题, 并可通过 EM 算法的随机版本进行求解。

$$f(y|\mu, \sigma, p) = \frac{p(1-p)}{\sigma} \exp \left[-\rho_p \left(\frac{y-\mu}{\sigma} \right) \right]. \quad (7)$$

式 (7) 中: μ 为位置参数; σ 为比例参数 ($\sigma > 0$); $p \in (0, 1)$ 为偏度参数; $\rho_p(u)$ 为分位数回归的检验损失函数:

$$\rho_p(u) = u(p - I\{u < 0\}). \quad (8)$$

式 (8) 中: $I\{u < 0\}$ 为指示函数, 用非对称拉普拉斯分布 ALD (μ, σ, p) 表示。

1.3.4 模型拟合与评价 采用均方根误差 (root mean square error, RMSE)、平均绝对误差 (mean absolute error, MAE)、调整后决定系数 (adjusted coefficient of determination, R_{adj}^2)、赤池信息准则 (Akaike information criterion, AIC) 和贝叶斯信息准则 (Bayesian information criterion, BIC), 对模型的拟合精度和预测精度进行综合评价。模型的拟合与统计分析均在 R 语言环境中完成, 其中分位数回归模型采用 quantreg 包进行构建, 非线性混合效应分位数回归模型采用 qrNLMM 包进行拟合, 模型结果的整理与可视化主要借助 dplyr、ggplot2 等扩展包完成。

2 结果与分析

2.1 广义最大冠幅模型的建立

基于样地调查数据对 BMCW 进行拟合, 结果表明: 该模型能够较好地描述单木最大冠幅与胸径之间的非线性关系, 其 R_{adj}^2 为 0.350 9、RMSE 为 1.09 m, AIC 和 BIC 分别为 15 945.94 和 15 972.65。在此基础上, 引入相对林分密度作为竞争因子构建 GMCW。与 BMCW 相比, GMCW 的拟合精度明显提升, 其 R_{adj}^2 提高了 0.037 3, 达到 0.388 2, 而 RMSE 降低至 1.06 m, 较基础模型减少 0.03 m。同时, AIC 和 BIC 均显著降低, 表明在模型复杂度增加有限的前提下, 引入相对林分密度能够有效改善模型对最大冠幅变化的解释能力, 拟合优度检验和统计指标见表 2。上述结果表明, 林分密度是影响林木最大冠幅的重要因素。尽管引入相对林分密度对模型的拟合效果改善有限, 但将相对林分密度纳入基础最大冠幅模型, 可以更好地分析不同林分密度条件下的最大冠幅潜力, 从而为确定最优林分密度提供更有意义的生物学依据。

2.2 分位数最大冠幅模型的建立

以 GMCW 为基础, 分别在 $\tau=0.90$ 、 0.95 和 0.99 上构建 QMCW, 其参数估计结果及拟合优度指标见表 3。结果表明: 不同分位点下模型参数及评价指标存在明显差异。其中, 在 $\tau=0.90$ 时, 模型拟合效果相对最优, 其 R_{adj}^2 最大 (0.281 6) 而 RMSE 最小 (1.30 m), 因此选择 $\tau=0.90$ 作为后续分析与模型扩展的最优分位点。

从参数变化趋势来看, 随着 τ 由 0.90 提升至 0.95, 参数 a 明显增大, 由 9.998 8 增至 12.921 5, 由于参数 a 表示胸径趋于较大时冠幅的渐近上限, 其数值变化直接反映不同分位水平下潜在最大冠幅的差异。 τ 越高, 模型所刻画的样本越接近冠幅分布的上边界, 因此参数 a 的明显增大表明, 在更高分位水

表 2 基础最大冠幅模型及广义最大冠幅模型参数估计值及拟合优度

Table 2 Parameter estimates and goodness-of-fit statistics of the BMCW and GMCW models

模型	参数估计值				评价指标			
	a	b_0	b_1	c	RMSE/m	AIC	BIC	R_{adj}^2
基础最大冠幅模型(BMCW)	5.887 3	3.764 2		0.080 2	1.09	15 945.94	15 972.65	0.350 9
广义最大冠幅模型(GMCW)	8.710 0	3.061 2	2.937 6	0.055 3	1.06	15 678.89	15 705.60	0.388 2

表 3 分位数最大冠幅模型参数估计值及拟合优度

Table 3 Parameter estimates and goodness of fit for the QMCW models

分位点(τ)	参数估计值				评价指标		
	a	b_0	b_1	c	RMSE/ m	MAE/ m	R_{adj}^2
0.90	9.998 8(1.716 0)	2.721 3(0.624 7)	1.766 3(0.220 0)	0.059 5(0.008 2)	1.30	1.04	0.281 6
0.95	12.921 5(2.304 2)	3.373 9(0.760 6)	2.087 2(0.330 5)	0.054 0(0.005 6)	1.57	1.27	0.180 8
0.99	14.926 9(1.410 6)	1.185 8(0.162 2)	-4.552 0(0.326 7)	-0.016 5(0.001 8)	2.28	2.01	0.043 1

说明：括号中数值为参数误差值。

平下，林木个体能够达到更大的理论冠幅上限，模型刻画的冠幅上界更加接近林木在弱竞争条件下的潜在最大空间占有能力。参数 b_0 也呈现增加趋势，由 2.721 3 增至 3.373 9。由于 b_0 表示在无密度竞争条件下冠幅在小径阶所受到的基线抑制强度，其增大意味着在高分位个体中，小径阶冠幅扩展更为迅速，曲线在早期阶段更快趋近上限，这反映了优势木个体在早期便具备更强的侧向扩展能力。参数 b_1 同样随分位点升高而增大，从 1.766 3 增至 2.087 2，说明在潜在最大冠幅个体中，林分密度对冠幅扩展的抑制作用更加显著，体现了“潜在最大冠幅”对竞争压力更为敏感的生态学特征。相比之下，参数 c 略有下降，从 0.059 5 降至 0.054 0，表明冠幅趋近上限的扩展速率在更高分位下略有放缓，即优势木个体需要更大的胸径才能逐渐接近其理论冠幅上限。当取 $\tau=0.99$ 时，模型参数的解释能力均有所下降。

从模型评价指标来看，随着分位点升高，RMSE 和 MAE 均呈现递增趋势，RMSE 由 1.30 m 增至 2.28 m，MAE 由 1.04 m 增至 2.01 m，而 R_{adj}^2 则显著下降，由 0.281 6 降至 0.043 1，说明在极高分位水平下模型参数估计的不确定性增加，模型对刻画冠幅上界的稳定性明显减弱。相比之下， $\tau=0.90$ 在保持较高分位特征的同时，参数估计较为稳定、评价指标表现相对较优，能够在冠幅上界刻画能力与模型稳定性之间取得良好平衡。进一步对比发现，3 个分位点下构建的分位数最大冠幅模型的整体拟合精度均低于 GMCW。以最优分位点 ($\tau=0.90$) 为例，其 R_{adj}^2 相较于 GMCW 降低了 0.106 6，RMSE 增加约 0.24 m，说明单纯采用分位数回归方法虽然能够刻画条件分布的上界特征，但未能充分考虑样地间结构差异，冠幅生长不仅受胸径和林分密度影响，还受到样地立地条件等因素的综合调控。在未引入随机效应的情况下，QMCW 假定所有样地共享相同的参数结构，忽略了样地间异质性，导致模型对个体上界的刻画能力受限，对冠幅变化的解释能力仍存在一定局限。

2.3 最大非线性分位数混合效应冠幅模型的建立

为进一步考虑不同样地尺度上林木生长环境差异对冠幅的影响，在最优分位点 ($\tau = 0.90$) 对应的分位数最大冠幅模型基础上，引入随机效应构建 NME-QMCW。以样地为分组因子，分别将模型中各参数的不同组合作为随机参数进行拟合，共设定 15 种随机参数组合形式。结果仅有一种随机参数组合能够稳定收敛，其余组合在迭代过程中未能获得可靠解。

对比发现，引入随机效应后模型拟合精度显著提升。与 BMCW、GMCW 以及 QMCW 相比，NME-QMCW 的 R_{adj}^2 分别提高 0.184 4、0.147 1、0.281 6，整体拟合效果最优。上述结果表明，引入样地层级随机效应能够有效刻画不同样地之间的异质性差异，显著提升最大冠幅模型的拟合精度与解释能力。综合模型收敛性、生物学合理性及拟合优度结果，最终选取样地为随机效应因子，并将参数 μ_1 设定为随机参数，构建的 NME-QMCW 如下：

$$C_{W\tau} = \frac{a_{\tau} + \mu_1}{1 + (b_{0\tau} + b_{1\tau}RD) \times \exp(-c_{\tau}D)} \circ$$

(9)

式 (9) 中： $C_{W\tau}$ 为第 τ 分位数处的冠幅估计值； τ 为分位点水平； μ_1 为样地层级随机效应参数； a_τ 、 $b_{0\tau}$ 、 $b_{1\tau}$ 、 c_τ 、为第 τ 分位点下的固定效应参数。

2.4 模型检验

为进一步评估不同最大冠幅-胸径模型的预测性能，基于检验数据对不同模型进行精度验证 (表 5)。评价指标均基于观测冠幅与模型预测值之间的误差统一计算。结果表明，不同模型在预测精度上存在明显差异，其综合表现由优到劣依次为 NME-QMCW、GMCW、BMCW、QMCW。其中，NME-QMCW 的 RMSE、MAE 和 R_{adj}^2 等指标均表现最优，表明分位数回归下进一步引入林分密度与样地层级随机效应后，模型不仅能够刻画冠幅条件分布的上界特征，还有效考虑了样地间结构差异，从而提高了最大冠幅预测精度和稳定性。相比之下，QMCW 虽能够描述冠幅分布的高分位特征，但由于未考虑样地层级异质性，其预测能力明显弱于 NME-QMCW。这进一步证明，在具有层级结构的林分数据中，引入随机效应是提升最大冠幅模型表现的关键。

为直观展示不同密度等级对最大冠幅-胸径关系的调节作用，选取 $D_R=0.2$ 、 0.4 、 0.6 和 0.8 作为代表性密度水平绘制 $\tau=0.90$ 分位条件下的模型曲线 (图 1)。未设置 $D_R=0$ 和 $D_R=1$ 的极端情景，是因为完全无竞争或达到理论最大拥挤状态在实际林分中几乎不存在，选取代表性区间更符合现实经营情景，也有利于比较不同密度等级下林木冠幅的响应差异。总体来看，各密度等级下最大冠幅均随胸径增大而持续上升，表明在高分位生长水平上，树冠扩展与胸径生长之间保持稳定的正相关关系。不同密度等级之间呈现明显差异：低密度 ($D_R=0.2$) 在大部分胸径范围内对应较高的冠幅值，高密度条件 ($D_R=0.8$) 整体处于较低水平，而 $D_R=0.4$ 和 0.6 则介于二者之间，反映在相同胸径条件下，较低密度有利于林木潜在冠幅扩展，而较高密度下树冠生长受到竞争限制。各密度等级对应的 $\tau=0.90$ 分位曲线在中、大径级阶段出现交叉现象： $D_R=0.6$ 与 0.8 的分位曲线在胸径约 22.2 cm 处相交 (交点 a)， $D_R=0.4$ 与 0.6 在约 27.1 cm 处发生交叉 (交点 b)，而 $D_R=0.2$ 与 0.6 则在约 38.8 cm 处出现交叉 (交点 c)。从生态机制上看，密度越高通常意味着竞争越强，冠幅扩展受抑制越明显，因此不同密度曲线在整个径级范围内频繁交叉并不符合一般生长规律。结合样本分布情况分析，在大径阶范围内不同密度水平的样本数量相对有限，尤其在高密度条件下大径级个体较少。因此，曲线末端的局部交叉更可能反映模型在样本相对稀疏区间的数学拟合特征，而非稳定的生态阈值或普适规律。在交点之前， $\tau=0.90$ 冠幅差异主要体现为密度增加对树冠扩展的抑制作用；而在交点之后，部分中等密度条件下的最大冠幅增长速率逐渐提高，表现出与低密度条件相近甚至更高的冠幅扩展潜力，表明随着胸径增大，林分密度对林木潜在冠幅形成的影响呈现出随胸径变化的非一致性特征。总体而言，在样本数据覆盖的主要径级范围内，各密度曲线仍表现出密度越高，最大冠幅越受抑制的总体趋势。基于 $\tau=0.90$ 分位所构建的模型能够揭示不同密度水平下冠幅潜在生长上限的差异，为最大冠幅预测

表 4 非线性混合效应分位数最大冠幅模型参数估计值及拟合优度

Table 4 Parameter estimates and goodness-of-fit statistics for the NME-QMCW model					
参数	估计值	标准误	RMSE/ m	MAE/ m	R_{adj}^2
a_τ	15.534 6	0.594 7	0.94	0.66	0.535 3
$b_{0\tau}$	3.928 6	0.254 1			
$b_{1\tau}$	4.361 7	0.333 5			
c_τ	0.047 9	0.000 6			

表 5 不同最大冠幅模型参数估计值及拟合优度

Table 5 Parameter estimates and goodness-of-fit statistics for different maximum crown width models				
模型	评价指标			
	RMSE/ m	MAE/ m	R_{adj}^2	
基础最大冠幅模型 (BMCW)	1.09	0.86	0.350 9	
广义最大冠幅模型 (GMCW)	1.06	0.85	0.388 2	
分位数最大冠幅模型 (QMCW)	1.30	1.04	0.281 6	
非线性混合效应分位数最大冠幅模型 (NME-QMCW)	0.94	0.66	0.535 3	

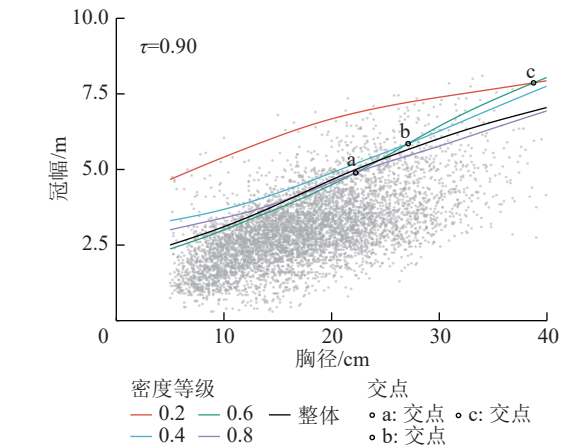


图 1 不同林分密度下的最大冠幅-胸径关系
Figure 1 Maximum crown width-diameter at breast height relationship under different stand densities

模型构建及林分密度调控提供参考。

3 讨论

本研究中立地指数未能明显改善模型拟合效果,因此未纳入最终模型。可能的原因是样地内立地条件差异较小,立地指数对最大冠幅的解释作用有限,而胸径与林分密度则在解释冠幅变异方面表现出更直接和明显的影响。此外,基于张广才岭西坡 91 块长白落叶松人工林固定样地数据构建的最大冠幅及密度相关模型虽然能够较好地覆盖该区域内的不同龄级和密度梯度,但其空间范围仍然局限于特定的生态区域,未能涵盖更大尺度上的立地条件差异。因此,本研究所拟合的最大密度关系和最大冠幅曲线反映的是该区域生态条件下的区域最大值,而非物种在更大地理尺度上的理论极限。未来研究可以基于更大尺度的森林资源清查数据或跨区域样地资料进行建模,从而获得更具普适性的最大密度参数,并对长白落叶松人工林最大密度及冠幅极限关系进行进一步验证与修正。这一进展将有助于提升模型的适用性与预测能力,提供更为准确的密度调控和经营管理依据。

本研究探讨了林分密度对林木生长的影响,引入相对林分密度的 GMCW 明显提升了最大冠幅-胸径模型的拟合精度;与 BMCW 相比,GMCW 在 R_{adj}^2 和误差指标等方面均表现更优,验证了在最大冠幅预测中考虑密度效应的必要性。这一结果与吕乐乐^[25]和佟艺玫等^[26]的研究结论一致,证实了林分密度在调控树木生长和林分结构中的关键作用。通过将相对林分密度引入最大冠幅模型,不仅提高了模型的统计性能,也增强了模型在人工林经营决策中的生物学解释意义,为林业管理和规划提供科学依据。

本研究在 BMCW 基础上,进一步引入分位数回归方法,构建了 QMCW,并确定 $\tau=0.90$ 为最优分位点,分位数回归能够刻画响应变量条件分布的不同位置特征,避免了人为筛选样本带来的主观性偏差。已有研究表面,分位数回归在林业建模中具有良好的稳健性和灵活性,例如高慧淋等^[27]的研究采用 0.99 分位点构建了长白落叶松人工林最大密度线,与最大似然回归相比参数估计结果更稳定,而且能够避免选取数据的人为性,以此刻画林分密度上界;将分位数回归应用于人工樟子松 *Pinus sylvestris* 树干削度^[28]、华北落叶松 *Larix gmelinii* 干型曲线^[29]及马尾松 *Pinus massoniana*-青冈栎 *Cyclobalanopsis glauca* 混交林树高-胸径模型^[30]中,均取得了优于传统回归模型的拟合效果。FARIAS 等^[31]使用混合效应和分位数回归模型预测了土耳其 2 种树种的树高,比较了不同模型在预测树高方面的性能,为林业管理提供了新的工具。这些研究表明,分位数回归能够在非正态、异方差数据条件下更稳健地描述生长关系,与传统的最小二乘法相比分位数回归更加稳健。

本研究基于最优分位点进一步引入样地层级随机效应构建了 NME-QMCW。将分位数回归与混合效应模型相结合,能够同时刻画条件分布特征和分组数据结构。SUN 等^[32]将线性分位数混合效应模型应用到冠幅模型构建中,取得了较好的结果。该方法既可以估计因变量的条件分布,又可以评估其在各分位数上的影响,有效克服了分位数回归方法稳定性差以及拟合精度低的缺点,充分考虑了样地对树木生长的影响,佟艺玫等^[26]建立了基于样地水平的最优分位点的线性混合效应分位数回归冠幅模型,结果显示引入混合效应的线性分位数回归模型的评价指标优于传统分位数回归,该方法很好地解释了样地之间的差异;也有学者将分位数回归与非线性混合效应模型相结合的方法,应用到冠幅模型上,RAPTIS 等^[33]采用该方法预测欧洲黑松 *Fagus sylvatica* 的最大冠幅宽度。王宝莹等^[34]将分位数回归与非线性混合效应法相结合应用于树高胸径模型构建,结果表明对分组数据结构中不同分位点个体间的差异与关联做出解释,提高了模型的稳定性以及拟合精度。以上研究均证明了混合效应分位数模型在提高模型稳定性和拟合精度方面的优势,而本研究结果进一步验证了该方法在最大冠幅预测中的适用性与可靠性。

本研究在不同林分密度情境下构建最大冠幅模型,可以揭示树木之间竞争方式随径级变化的动态机制。分位数回归作为一种能够有效刻画响应变量极值变化的统计方法,在最大冠幅建模中被广泛应用,并能够规避均值回归的偏差问题^[35]。通过分位数回归可对冠幅-胸径关系不同密度条件下的上限进行估计,从而提取出最大冠幅的潜在空间扩展界限。在低密度林分中,树木获得更多光照及边缘空间资源,导致小径级时冠幅增长相对更快;在高密度林分中,受竞争约束更早地趋向高度生长,小径级时冠幅可能未显著受限。随着径级增大,侧向空间的竞争逐渐成为决定因素,这使得高密度林分的冠幅扩展受到更强压制,而低密度林分则有较大的空间优势,因此在中大径级出现冠幅曲线的交叉现象^[36]。这一

现象可能与林分竞争机制的阶段变化有关。根据冠层分层理论和林分结构发展理论, 林木生长过程中存在由垂直光竞争向水平空间竞争的阶段转变^[37]。在幼龄或中小径级阶段, 个体主要通过高度增长争夺光资源; 而随着胸径增大和冠层趋于封闭, 侧向空间成为限制因子, 冠幅扩展逐渐受到邻体干扰的控制。因此, 不同密度条件下冠幅-胸径曲线在中大径级阶段出现差异甚至局部交叉, 可能反映了竞争方式由垂直主导向水平主导转变的生态过程, 邻近效应分析也强调邻近树木与冠层竞争对个体生长的重要调节作用^[38]。但该解释基于林分竞争理论的推断, 曲线交叉本身并不能直接证明竞争机制的转换, 其具体径级位置仍受样本分布和模型形式的影响。因此, 相关结论应理解为一种生态学解释框架, 而非确定性的生物学阈值。尽管如此, 该现象仍为探讨林分密度调控与冠层结构演变之间的关系提供了新的思路, 并可能为间伐时机的理论分析提供参考依据。从经营角度出发, 基于最大冠幅的分位数回归模型能够在不同径级下预测不同密度下的理论冠幅上限, 进而反推最优密度曲线, 因此, 基于最大冠幅的密度调控策略, 不仅具有较强的生物学解释性, 而且能为长白落叶松林分密度调控方案以及经营密度表的建立提供理论和实证支持。通过该模型, 可以在不同胸径条件下, 计算林分的最大允许株数, 特别是在冠幅达到重叠极限时。具体来说, 当林木的冠幅开始受到竞争限制, 即冠幅趋近上限, 该模型能够结合不同胸径与林分密度的关系, 推算出特定胸径下的最大允许株数。

本研究综合比较 4 种冠幅-胸径建模方法发现, NME-QMCW 在各项评价指标上均表现最优。与 GMCW 相比, 其 R_{adj}^2 提高了 0.147 1, RMSE 降低了 0.13 m, 表明非线性混合效应分位数回归方法能够更充分地刻画不同分位水平下个体间的差异性与相关性。基于此, 选择 NME-QMCW 作为长白落叶松人工林的最大冠幅预测模型是合理且可行的, 该模型在揭示林分密度调控机制、指导人工林结构优化与经营调控方面具有较高的应用潜力。

4 结论

本研究采用非线性混合效应分位数回归方法构建了长白落叶松人工林最大冠幅预测模型。结果表明, 引入相对林分密度显著提升了模型拟合优度和预测精度, 证实了林分密度在调控林木冠幅生长中的关键作用。综合不同分位点模型表现, $\tau=0.90$ 被确定为最优分位水平, 能够有效刻画冠幅分布上界及其随胸径变化的特征, 并在此基础上建立了考虑样地随机效应的最大冠幅预测模型。研究进一步表明, 最大冠幅不仅随胸径增大而持续上升, 其变化趋势还明显受相对林分密度调节, 不同密度等级下 $\tau=0.90$ 分位曲线在中、大径级阶段出现交叉, 表明密度效应随径级发生转变, 密度效应转化的胸径范围大致为 22.2~38.8 cm。这一交点不仅揭示了密度对冠幅扩展的调节机制, 也为人工林的密度调控与经营决策提供了重要参考。林分密度的优化调整可通过合理的间伐时机来实现, 从而有效促进林木健康生长和优化经营效益。总体而言, 本研究从高分位角度揭示了林分密度对长白落叶松人工林潜在冠幅生长的影响, 为最大冠幅预测及精细化密度管理提供了科学依据。

5 参考文献

- [1] 和璐璐, 张莹, 章毓文, 等. 辽东山区不同坡向长白落叶松人工林树冠特征与林木生长关系[J]. 植物生态学报, 2023, 47(11): 1523–1539. HE Lulu, ZHANG Xuan, ZHANG Yuwen, et al. Crown characteristics and its relationship with tree growth on different slope aspects for *Larix olgensis* var. *changbaiensis* plantation in eastern Liaoning mountainous area, China[J]. *Chinese Journal of Plant Ecology*, 2023, 47(11): 1523–1539. DOI: 10.17521/cjpe.2022.0390.
- [2] 李凤日, 王治富, 王保森. 落叶松人工林有效冠动态研究 (I)——有效冠的确定[J]. 东北林业大学学报, 1996, 24(1): 1–8. LI Fengri, WANG Zhifu, WANG Baosen. Studies on the effective crown development of *Larix olgensis* (I)—determination of the effective crown[J]. *Journal of Northeast Forestry University*, 1996, 24(1): 1–8. DOI: 10.13759/j.cnki.dlxb.1996.01.004.
- [3] KERSHAW J A, MAGUIRE D A. Influence of vertical foliage structure on the distribution of stem cross-sectional area increment in western hemlock and balsam fir[J]. *Forest Science*, 2000, 46(1): 86–94. DOI: 10.1093/forestscience/46.1.86.
- [4] FU Liyong, LEI Yuancai, WANG Guangxing, et al. Comparison of seemingly unrelated regressions with error-in-variable models for developing a system of nonlinear additive biomass equations[J]. *Trees*, 2016, 30(3): 839–857. DOI: 10.1007/

s00468-015-1325-x.

- [5] PRETZSCH H, BIBER P, UHL E, *et al.* Crown size and growing space requirement of common tree species in urban centres, parks, and forests[J]. *Urban Forestry & Urban Greening*, 2015, **14**(3): 466–479. DOI: [10.1016/j.ufug.2015.04.006](https://doi.org/10.1016/j.ufug.2015.04.006).
- [6] QIU Siyu, GAO Peiwen, PAN Lei, *et al.* Developing nonlinear additive tree crown width models based on decomposed competition index and tree variables[J]. *Journal of Forestry Research*, 2023, **34**(5): 1407–1422. DOI: [10.1007/s11676-022-01576-0](https://doi.org/10.1007/s11676-022-01576-0).
- [7] 雷相东, 张则路, 陈晓光. 长白落叶松等几个树种冠幅预测模型的研究[J]. *北京林业大学学报*, 2006, **28**(6): 75–79. LEI Xiangdong, ZHANG Zelu, CHEN Xiaoguang. Crown-width prediction models for several tree species including *Larix olgensis* in northeastern China[J]. *Journal of Beijing Forestry University*, 2006, **28**(6): 75–79. DOI: [10.13332/j.1000-1522.2006.06.013](https://doi.org/10.13332/j.1000-1522.2006.06.013).
- [8] 黄萍, 刘艳红. 北京松山油松林林分结构和地形对幼苗更新的影响[J]. *生态学杂志*, 2018, **37**(4): 1003–1009. HUANG Ping, LIU Yanhong. Effects of stand structure and terrain factors on seedling regeneration of *Pinus tabulaeformis* forest in the Songshan National Nature Reserve, Beijing[J]. *Chinese Journal of Ecology*, 2018, **37**(4): 1003–1009. DOI: [10.13292/j.1000-4890.201804.024](https://doi.org/10.13292/j.1000-4890.201804.024).
- [9] 车少辉, 张建国. 基于自稀疏理论的杉木人工林密度指标研究[J]. *植物研究*, 2012, **32**(3): 343–347. CHE Shaohui, ZHANG Jianguo. Comparative study on stand density measures based on self-thinning theory for Chinese fir plantation[J]. *Bulletin of Botanical Research*, 2012, **32**(3): 343–347.
- [10] BRAGG D C. A local basal area adjustment for crown width prediction[J]. *Northern Journal of Applied Forestry*, 2001, **18**(1): 22–28. DOI: [10.1093/njaf/18.1.22](https://doi.org/10.1093/njaf/18.1.22).
- [11] 姚慧芳, 卢杰, 王超, 等. 基于混合效应法的急尖长苞冷杉林单木冠幅预测模型[J]. *高原农业*, 2021, **5**(6): 572580. YAO Huifang, LU Jie, WANG Chao, *et al.* Prediction model of single Tree canopy of *Abies georgei* var. *Smithii* forest based on mixed effect method[J]. *Journal of Plateau Agriculture*, 2021, **5**(6): 572580. DOI: [10.19707/j.cnki.jpa.2021.06.005](https://doi.org/10.19707/j.cnki.jpa.2021.06.005).
- [12] GILL S J, BIGING G S, MURPHY E C. Modeling conifer tree crown radius and estimating canopy cover[J]. *Forest Ecology and Management*, 2000, **126**(3): 405–416. DOI: [10.1016/S0378-1127\(99\)00113-9](https://doi.org/10.1016/S0378-1127(99)00113-9).
- [13] HEMERY G E, SAVILL P S, PRYOR S N. Applications of the crown diameter–stem diameter relationship for different species of broadleaved trees[J]. *Forest Ecology and Management*, 2005, **215**(1/3): 285–294. DOI: [10.1016/j.foreco.2005.05.016](https://doi.org/10.1016/j.foreco.2005.05.016).
- [14] CONDÉS S, STERBA H. Derivation of compatible crown width equations for some important tree species of Spain[J]. *Forest Ecology and Management*, 2005, **217**(2/3): 203–218. DOI: [10.1016/j.foreco.2005.06.002](https://doi.org/10.1016/j.foreco.2005.06.002).
- [15] 邱思玉, 孙玉军. 长白落叶松人工林单木冠幅模型[J]. *东北林业大学学报*, 2021, **49**(2): 49–53. QIU Siyu, SUN Yujun. Individual tree crown width prediction models for *Larix olgensis* plantation[J]. *Journal of Northeast Forestry University*, 2021, **49**(2): 49–53. DOI: [10.13759/j.cnki.dlxb.2021.02.009](https://doi.org/10.13759/j.cnki.dlxb.2021.02.009).
- [16] MISIK T, ANTAL K, KÁRÁSZ I, *et al.* Nonlinear height–diameter models for three woody, understory species in a temperate oak forest in Hungary[J]. *Canadian Journal of Forest Research*, 2016, **46**(11): 1337–1342. DOI: [10.1139/cjfr-2015-0511](https://doi.org/10.1139/cjfr-2015-0511).
- [17] BERNARD D, MARC L, ERIC M. Convergence of a stochastic approximation version of the EM algorithm[J]. *The Annals of Statistics*, 2002, **27**(1): 94–128. DOI: [10.1214/AOS/1018031103](https://doi.org/10.1214/AOS/1018031103).
- [18] GALARZA C E, CASTRO L M, LOUZADA F, *et al.* Quantile regression for nonlinear mixed effects models: a likelihood based perspective[J]. *Statistical Papers*, 2020, **61**(3): 1281–1307. DOI: [10.1007/s00362-018-0988-y](https://doi.org/10.1007/s00362-018-0988-y).
- [19] DELYON B, AMS-CLASSIFICATION P U, SECONDARY M, *et al.* Convergence of a stochastic approximation version of the EM algorithm[J]. *The Annals of Statistics*, 1999, **27**(1): 94–128. DOI: [10.1007/BF02911894](https://doi.org/10.1007/BF02911894).
- [20] 张薇, 陈冠谋, 董灵波. 长白落叶松人工林单木最大冠幅模型及应用[J]. *应用生态学报*, 2025, **36**(8): 2270–2278. ZHANG Wei, CHEN Guanmou, DONG Lingbo. Maximum crown width model of *Larix olgensis* plantation and its application[J]. *Chinese Journal of Applied Ecology*, 2025, **36**(8): 2270–2278. DOI: [10.13287/j.1001-9332.202508.004](https://doi.org/10.13287/j.1001-9332.202508.004).
- [21] BURKHART H E. Comparison of maximum size–density relationships based on alternate stand attributes for predicting tree numbers and stand growth[J]. *Forest Ecology and Management*, 2013, **289**: 404–408. DOI: [10.1016/j.foreco.2012.10.041](https://doi.org/10.1016/j.foreco.2012.10.041).
- [22] ANDREWS C, WEISKITTEL A, D’AMATO A W, *et al.* Variation in the maximum stand density index and its linkage to climate in mixed species forests of the North American Acadian Region[J]. *Forest Ecology and Management*, 2018, **417**:

- 90–102. DOI: [10.1016/j.foreco.2018.02.038](https://doi.org/10.1016/j.foreco.2018.02.038).
- [23] ZHANG Lianjun, BI Huiquan, GOVE J H, *et al.* A comparison of alternative methods for estimating the self-thinning boundary line[J]. *Canadian Journal of Forest Research*, 2005, **35**(6): 1507–1514. DOI: [10.1139/x05-070](https://doi.org/10.1139/x05-070).
- [24] KOENKER R, BASSETT G. *Quantile regressions* [J]. *Econometrica*, 1978, **46**(1): 33–50.
- [25] 吕乐乐, 王文彬, 董灵波. 基于哑变量和分位数回归的兴安落叶松更新幼树的树高-胸径模型[J]. *应用生态学报*, 2023, **34**(9): 2355–2362. LÜ Lele, WANG Wenbin, DONG Lingbo. Height-diameter models of regenerated saplings of *Larix gmelinii* based on dummy variable and quantile regression[J]. *Chinese Journal of Applied Ecology*, 2023, **34**(9): 2355–2362. DOI: [10.13287/j.1001-9332.202309.005](https://doi.org/10.13287/j.1001-9332.202309.005).
- [26] 佟艺玫, 陈东升, 冯健, 等. 基于线性分位数混合效应的辽东山区红松冠幅模型[J]. *应用生态学报*, 2022, **33**(9): 2321–2330. TONG Yiwen, CHEN Dongsheng, FENG Jian, *et al.* Crown width model for planted Korean pine in eastern Liaoning mountains based on mixed effect linear quantile[J]. *Chinese Journal of Applied Ecology*, 2022, **33**(9): 2321–2330. DOI: [10.13287/j.1001-9332.202209.002](https://doi.org/10.13287/j.1001-9332.202209.002).
- [27] 高慧淋, 董利虎, 李凤日. 基于分位数回归的长白落叶松人工林最大密度线[J]. *应用生态学报*, 2016, **27**(11): 3420–3426. GAO Huilin, DONG Lihu, LI Fengri. density-size line for *Larix olgensis* plantations based on quantile regression[J]. *Chinese Journal of Applied Ecology*, 2016, **27**(11): 3420–3426. DOI: [10.13287/j.1001-9332.201611.026](https://doi.org/10.13287/j.1001-9332.201611.026).
- [28] 辛士冬, 姜立春. 利用分位数回归模拟人工樟子松树干干形[J]. *北京林业大学学报*, 2020, **42**(2): 1–8. XIN Shidong, JIANG Lichun. Modeling stem taper profile for *Pinus sylvestris* plantations using nonlinear quantile regression[J]. *Journal of Beijing Forestry University*, 2020, **42**(2): 1–8. DOI: [10.12171/j.1000-1522.20190014](https://doi.org/10.12171/j.1000-1522.20190014).
- [29] 付立华, 侯金潮, 孙赫, 等. 基于分位数回归的华北落叶松干形曲线模拟[J]. *林业资源管理*, 2020(1): 151–157. FU Lihua, HOU Jinchao, SUN He, *et al.* Stem shape curves simulation for *Larix principis-rupprechtii* using quantile regressions[J]. *Forest Resources Management*, 2020(1): 151–157. DOI: [10.13466/j.cnki.lyzygl.2020.01.019](https://doi.org/10.13466/j.cnki.lyzygl.2020.01.019).
- [30] 孙拥康, 汤景明, 王怡. 基于分位数回归的马尾松青冈栎混交林树高-胸径模型[J]. *中南林业科技大学学报*, 2021, **41**(12): 18–25. SUN Yongkang, TANG Jingming, WANG Yi. Height-diameter model of *Pinus massoniana* and *Cyclobalanopsis glauca* mixed forest based on Quantile Regression[J]. *Journal of Central South University of Forestry & Technology*, 2021, **41**(12): 18–25. DOI: [10.14067/j.cnki.1673-923x.2021.12.003](https://doi.org/10.14067/j.cnki.1673-923x.2021.12.003).
- [31] FARIAS A A, SOARES C P B, LEITE H G, *et al.* Quantile regression: prediction of growth and yield for a Eucalyptus plantation in northeast Brazil[J]. *European Journal of Forest Research*, 2021, **140**(4): 1–7. DOI: [10.1007/s10342-021-01380-1](https://doi.org/10.1007/s10342-021-01380-1).
- [32] SUN Yunxia, GAO Huilin, LI Fengri. Using linear mixed-effects models with quantile regression to simulate the crown profile of planted *Pinus sylvestris* var. *mongolica* trees[J]. *Forests*, 2017, **8**(11): 446. DOI: [10.3390/f8110446](https://doi.org/10.3390/f8110446).
- [33] RAPTIS D I, KAZANA V, KECHAGIOGLOU S, *et al.* Nonlinear quantile mixed-effects models for prediction of the maximum crown width of *Fagus sylvatica* L., *Pinus nigra* Arn. and *Pinus brutia* Ten[J]. *Forests*, 2022, **13**(4): 499. DOI: [10.3390/f13040499](https://doi.org/10.3390/f13040499).
- [34] 王宝莹, 梁瑞婷, 谢涛鸿, 等. 基于非线性分位数混合效应构建杉木树高曲线模型[J]. *北京林业大学学报*, 2023, **45**(11): 33–41. WANG Baoying, LIANG Ruiting, XIE Yunhong, *et al.* Construction of *Cunninghamia lanceolata* tree height curve model based on nonlinear quantile mixed effect[J]. *Journal of Beijing Forestry University*, 2023, **45**(11): 33–41. DOI: [10.12171/j.1000-1522.20220496](https://doi.org/10.12171/j.1000-1522.20220496).
- [35] CADE B S, NOON B R. A gentle introduction to quantile regression for ecologists[J]. *Frontiers in Ecology and the Environment*, 2003, **1**(8): 412–420. DOI: [10.1890/1540-9295\(2003\)001\[0412:agitqr\]2.0.co;2](https://doi.org/10.1890/1540-9295(2003)001[0412:agitqr]2.0.co;2).
- [36] KASSIER H W. Forest dynamics, growth and yield: from measurement to model: by hans pretzsch[J]. *Southern Forests: a Journal of Forest Science*, 2011, **73**(1): 63–65. DOI: [10.2989/20702620.2011.574816](https://doi.org/10.2989/20702620.2011.574816).
- [37] PURVES D W, LICHSTEIN J W, PACALA S W. Crown plasticity and competition for canopy space: a new spatially implicit model parameterized for 250 North American tree species[J]. *PloS One*, 2007, **2**(9): e870. DOI: [10.1371/journal.pone.0000870](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0000870).
- [38] WANG Yiru, LIU Zhaohua, LI Jiping, *et al.* Assessing the relationship between tree growth, crown size, and neighboring tree species diversity in mixed coniferous and broad forests using crown size competition indices[J]. *Forests*, 2024, **15**(4): 633. DOI: [10.3390/f15040633](https://doi.org/10.3390/f15040633).